Lycée secondaire : ALI BOURGUIBA KALAA KBIRA		Année scolaire : 2011 - 2012
Prof : MAATALLAH	Devoir de synthèse n° 2	Classe : 4 Sc 1
Epreuve : Mathématiques	Date : 07 - 03 - 2012	Durée : 3 heures

Exercice n° 1 : (2 points)

Pour chaque question une seule réponse est correcte. Relever cette réponse.

1) F est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui prend la valeur 3 en -1. Si $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 1$ alors :

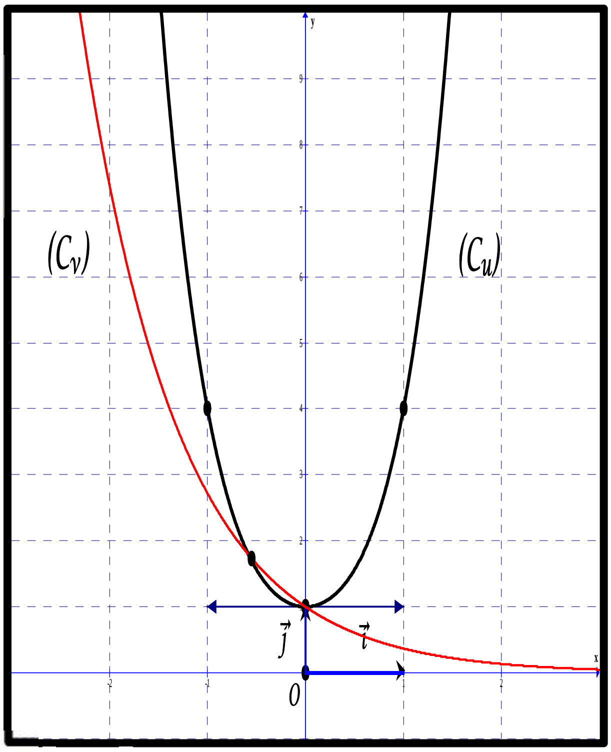
   a) $F(1) = -2$ b) $F(1) = 4$ c) $F(1) = 2$

2) $I = \int_1^e (x\ln x)^2 dx$ est égale à :

   a) $\frac{(5e^3-2)}{27}$ b) $\frac{(3e^3-2)}{27}$ c) $\frac{(4e^3+2)}{27}$

Exercice n° 2 : (6 points)

Soit u et v deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, représentées ci-contre dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $f : x \longmapsto \frac{u'(x)+u(x)}{u(x)}$



1) a) Montrer que $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner $F'(x)$

   b) Déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R} : F(x) = \ln(u(x)) + x$.

2) On admet que $\forall\, x \in \mathbb{R} : u(x) = x^4 + ax^2 + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}$ et $v(x) = e^{-x}$. Soit (C) la courbe de F dans un repère orthonormé .

   a) Etudier les problèmes de limites et montrer que $\Delta : y = x$ est une direction à (C) au voisinage de l'infini . Donner la position de Δ et (C) .

   b) Montrer que : $F(x) = 0$ admet , dans $\mathbb{R}$, exactement deux solutions 0 et $\alpha \in]-1,0[$.

   c) Construire la partie de (C) sur $[0,+\infty[$. Préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .

3) Calculer $\int_{-1}^{1} f(t)dt$. Déduire que $f(x) = 1$ admet , dans $[-1,1]$, au mois une solution .

Exercice n° 3 : (6 points)

1) Soit g la fonction définie sur]-1,1[par : $g(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

   a) Déterminer les réels a , b et c tels que $\forall\, x \in]-1,1[:\ g(x) = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$

   b) En déduire la primitive G de g sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0 .

2) Soit H la fonction définie sur $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ par : $H(x) = G(\cos x)$.

   a) Montrer que H est dérivable sur $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ et que $\forall\, x \in [\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}] :\ H'(x) = \frac{-\cos^2 x}{\sin x}$

   b) En déduire la valeur de $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt$

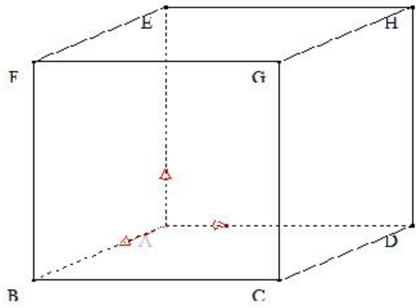
   c) Calculer $J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t.\ln(\sin t)\, dt$

Exercice 4 : (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $ABCDEFGH$ est un parallélépipède tel que :
$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$. Déterminer les composantes de chacun des vecteurs : $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB}\wedge\overrightarrow{EG}$.

   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG) .



2) Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

   a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G .

   b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG) .

3) Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre EBG .

   a) Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de α .

   b) Calculer le volume du tétraèdre $AEBG$.

   c) Pour quelle valeur de α , $\mathcal{V}$ est –il égal au volume du parallélépipède $ABCDEFGH$?