Lycée Ali B.Bembla	**Devoir de synthèse n°2** *Mathématiques*	*Classe* : 4 ^{ème} Sc exp_3
Date 07/03/2012	*Prof* :Mosrati chawki	*Durée* 3 heures

EXERCICE :1(2pts)

Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La primitive H de la fonction h définie pour tout réel x par $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ telle que $H(0)=-1$ est la fonction H définie pour tout réel x par :

a) $H(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-2$ b) $H(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{e}\right)$ c) $H(x)=\ln\left(\dfrac{e}{x^2+1}\right)-2$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe (C) d'équation $y=\sqrt{x}$ constitué des points de (C), d'abscisses comprises entre 0 et 1 . Le solide ainsi engendré a pour volume :

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) π c) 2π

3. La fonction f est définie est dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$. Son tableau de variation est le suivant :

x	-1	3	5	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ ↘	2 ↗	4 ↘	$-\infty$

a) $\int_3^5 f(x)dx<2$; b) $2\le\int_3^5 f(x)dx\le 4$; c) $\int_3^5 f(x)dx>4$

4 . Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. L'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction f : $x\mapsto\dfrac{1}{(x+1)^2}$, l'axe des abscisses , l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1 est égal à :

a) $-\dfrac{1}{2}$; b) 0 ; c) $\dfrac{1}{2}$

EXERCICE :2 (4 pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère o.n. $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$.

1) Montrer que S est une sphère de centre Ω(0 , 2 , 0) et de rayon 3.
2) a- Soit le plan P : $2x - 2y + z - 2 = 0$. Déterminer la position relative de S et P.
   b- Caractériser S∩P.
3) Soit P_m le plan dont une équation cartésienne est :
   $2mx + (1 - 2m)y + mz + 1 - 2m = 0$.

   a- Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1 \\ z=-2\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$

   vérifier que la droite Δ est incluse dans P_m.

   b- Calculer la distance $d(\Omega,P_m)$.

   c- Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S .

   d- Montrer que Δ est tangent à S en un point A dont on déterminera les coordonnées.

EXERCICE :3(4pts)

Pour tout n de IN* ,on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1/ a- Démontrer que pour tout x de]1 ,e [et pour tout entier naturel n, on a :
$(\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n < 0$.

b- En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

a- Montrer que : $I_n \geq 0$, et déduire que(I_n) est convergente.

2/ a – Calculer I_0 et I_1 (à l'aide d'une intégration par partie) .

b – Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout n de IN* :
$I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$.

c – En déduire que : $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

d – En déduire limite de I_n .

e – Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n .

EXERCICE :4(6pts)

A/ Soit la fonction g définie sur]-1 ; +∞[par : $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{1+x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de g dans un autre repère o.n. $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité : 2cm).

1) a- Montrer que $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$ b- Dresser le tableau de variations de g.
2) Monter que l'équation g(x) = 0 admet dans]-1 ; +∞ [deux solutions l'une 0 et l'autre α. Vérifier que 3.75< α <4.
3) Tracer la tangente en O à (C) et la courbe (C) .
4) a- Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x ∈]-1 ; +∞[. $\dfrac{x}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$.

   b- Soit t ∈]-1 ; +∞[.Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^t \ln(1+x)dx$

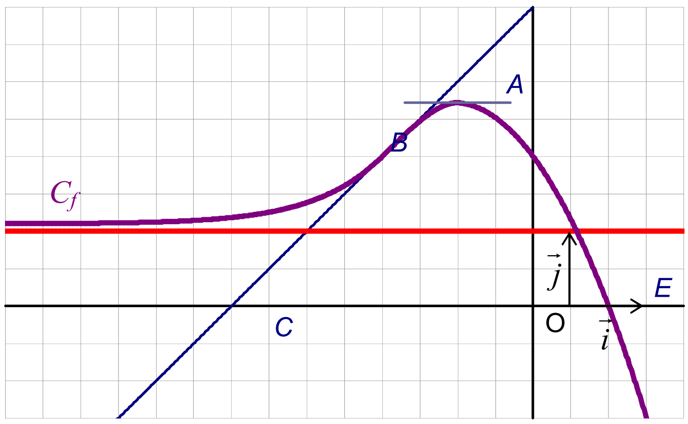
c- En déduire $\int_0^t g(x)dx$.

d- Montrer que l'aire, exprimer en cm² du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0 et x= α est égale à $\frac{4\alpha(\alpha-3)}{\alpha+1}$.

EXERCICE :4(4pts)

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Les points $E(1 ; 0)$, $A(-1 ; e)$ et $B(-2 ; 2)$ sont des points de C_f.
- La tangente à C_f en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à C_f en B passe par $C(-4 ; 0)$.
- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C_f en $-\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ et strictement décroissante sur $[-1 ; +\infty[$.



1. a. Donner les valeurs de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ ainsi que la limite de f en $-\infty$.

   b. Donner, en justifiant vos réponses, les nombres $f'(-1)$ et $f'(-2)$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$ et C_g sa représentation graphique.

   a. Déterminer l'intervalle I de définition de g . Calculer les limites de g en $-\infty$ et en 1.
   En déduire les asymptotes à la courbe C_g en précisant une équation pour chacune d'elles.

   b. Exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de g.

   c. Déterminer $g(-2)$ et $g'(-2)$, puis une équation de la tangente à C_g au point B' d'abscisse -2.