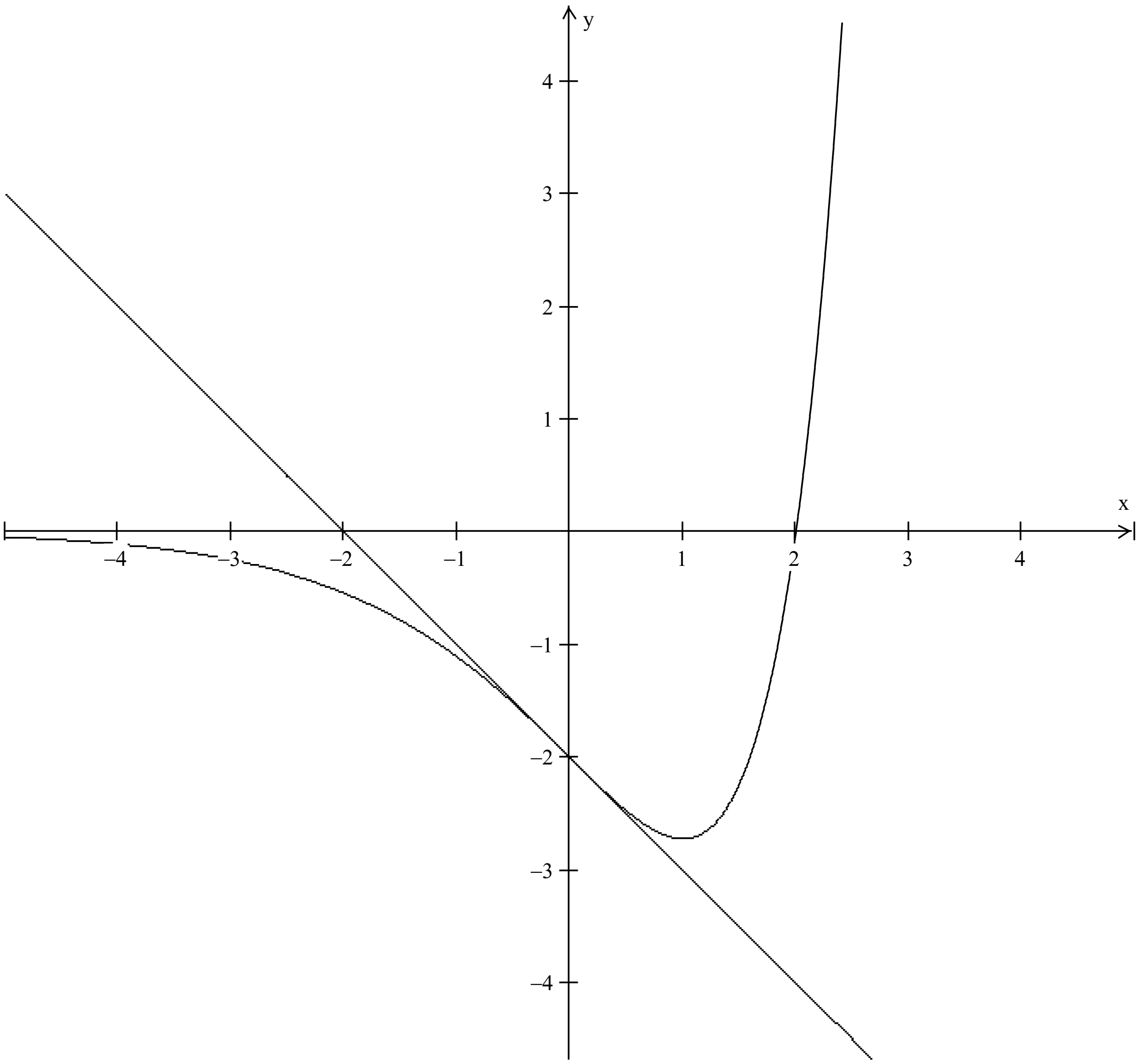
Lycée secondaire : Ibn Khaldoun	**Devoir de synthése N°2** **Epreuve :** **Mathématiques** **Durée : 3 H**	**Classe:** $4^{ième}$ **sc**
A/S :2012 - 2013		**Proposé par : Arfaoui khaled**

EXERCICE N°1 (4pts)

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal , la courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur IR la tangente D à la courbe (C) au point A(0, -2) passe par le point B (2 , -4)



On désigne par f ' la fonction dérivée de f

1) a) Donner la valeur de f(0)

b) Justifier que $f'(0) = -1$

2) On admet qu'il existe deux réels a et b tels que , pour tout réel x , $f(x) = (x + a)e^{bx}$

a) Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = (bx + ab + 1)e^{bx}$

b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes de a et b

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur IR par $f(x) = (x-2)e^{x}$

1) Donner l'expression de f ' ; En déduire le sens de variation de f
2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) En intégrant par parties Calculer $\int_2^3 f(x)\,dx$

4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites x= 1 et x = 3

EXERCICE N°2 (6pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on donne les points A(1, 0,-1) , B(1, - 2,1) , C(3, 0 ,0) et H(-1, 4 ,3)

1/ a) Montrer que les point A , B et C déterminent un Plan P

b) En déduire qu'une équation de P est $x - 2y - 2z - 3 = 0$

c) Montrer que A est le projeté orthogonal de H sur P

2/ On considère l'ensemble S des points M(x, y,z) de l'espace tels que

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon

b) Vérifier que I est le milieu du segment [AH]

c) Déterminer la position relative de S et P

3/ Soit J(0, 0, 1)

a) Vérifier que J appartient à S
b) Calculer la distance entre I et (AJ)
c) En déduire que (AJ) est tangente à S
d) Donner une représentation paramétrique de (AJ) et déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AJ) et P

EXERCICE N°3 (5pts)

Soit f la fonction définie sur [0,1[par : $f(x) = \ln(1 - x^2)$. on désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O , ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1/ a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter géométriquement ce résultat

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Tracer (C) en précisant sa demi-tangente à droite en 0

2/ a) Montrer que f réalise une bijection de [0,1[sur un intervalle J que l'on précisera

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f . tracer sa courbe $C_{f^{-1}}$ dans le même repère

3/ Montrer que $f^{-1}(x) = \sqrt{1-e^x}$ pour tout x de J

4/ On fait tourner la partie de la courbe de f^{-1} sur [0,1] autour de l'axe (O , $\vec{i}$) .on obtient un solide de révolution S . Calculer le volume de S

EXERCICE N°3 (5pts)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

1/ a) Soit $k \succ 0$, Montrer que : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$

b) Déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$

c) Montrer que $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{k(k+1)}, \forall k \succ 0$

2/ pour tout n $\in IN\backslash\{0,1\}$. on donne les trois suites réelles :

$\alpha_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.........+\frac{1}{n};\beta_n = \ln(n)$ et $t_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n-1}$

a) Montrer que pour tout n $\in IN\backslash\{0,1\}$ on a $\alpha_n \leq \beta_n \leq t_n$

b) déduire la limite de t_n puis la limite α_n

3/ on donne les suites définies sur $IN\backslash\{0,1\}$ par : $u_n = t_n - \ln(n)$ et $v_n = 1+\alpha_n - \ln(n)$

a) Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante

b) Montrer que $\forall$ n $\in IN\backslash\{0,1\}$ on à : $0 \leq u_n \leq v_n \leq 1$

c) Déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la meme limite $l \in [0,1]$

4/ Soit $S_n = \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3}+......+\frac{1}{2n(2n+1)}$, $n \in IN\backslash\{0,1\}$

a) Vérifier que : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, $\forall k \succ 0$

b) Simplifier l'expression de S_n et Calculer sa limite

c) Déduire la limite de (f(n) + f(n+1) + f(n+2) +....+ f (2n))