L.S.ELKSOUR Enseignant B.Anis Classes :4^{éme}SC-Exp$_1$ Durée :3h	**Devoir de synthése n°2** Mathématiques

Exercice1(3pts)

Répondre par vrai ou faux **en justifiant votre réponse**.

1)Le domaine de définition de la fonction f définie par f(x)=ln(1-x) est: $]0,+\infty[$

2) Le volume de solide S engendré par la rotation de l'arc

$$[\widehat{AB}] = \{M(x,y); 1 \leq x \leq 3 \; et \; y = \sqrt{2x+1}\} \; autour \; de \; l'axe (O,\vec{\imath}) est \; 10\pi$$

3) La valeur moyenne de la fonction f définie sur [0,1] par f(x)=$\sqrt{x}$ est : $\frac{2}{3}$

4) La fonction x→ $\int_{-1}^{x} \sqrt{t-1}dt$ est dérivable sur [1,+∞ [.

Exercice2(5pts)

La courbe (C) dans **l'annexe I** représente une fonction f définie sur IR dans un repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les droites d'équations respectives y=x+2 et y=x-2 sont des asymptotes à (C).

(C) admet une tangente horizontale au point O.

I) En utilisant le graphique répondre aux questions suivantes

1) Déterminer le tableau de variation de f .

2)Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

3)a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser

b) Construire la courbe de (C') de la fonction f^{-1} fonction réciproque de f.

c) f^{-1} est-dérivable en 0 ? Expliquer.

4) Soit $\lambda \in]0, +\infty[$ et $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=λ

a)Hachurer $\mathcal{A}_\lambda$ (choisir une valeur de $\lambda > 2$).

b) Vérifier que $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$ pour tout réels x.

b) En déduire que $\frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda \leq \mathcal{A}_\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda$.

c) Déterminer alors $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda$.

II) La courbe (C) dans **l'annexe I** représente la fonction f définie sur IR par

f(x)= ax + $\frac{bx}{\sqrt{x^2+4}}$

1) En utilisant la question I)2) montrer que a=1 et b= - 2.

2)Calculer $\mathcal{A}_\lambda$.

3)Retrouver alors $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda$

<u>Exercice3(3pts)</u>

Soit la suite (I_n) définie sur IN par $I_n = \int_0^1 x^{2n} \sin(\pi x)\, dx$.

1) Calculer I_0 .

2)a) Montrer $I_n \geq 0$ pour tout entier n.

b)Montrer que (I_n) est une suite décroissante. En déduire qu'elle est convergente .

3)a) Montrer que pour tout entier n on a : $I_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$

<u>Exercice4(5pts)</u>

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par f(x)= $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur$]2 , +\infty[$ et que f'(x)=$\frac{-4}{(\sqrt{x^2-4})^3}$

b)Dresser le tableau de variation de f.

2)a) Montrer que f réalise une bijection de $]2,+\infty[$Sur un intervalle K à préciser.

b)Montrer que l'équation f(x)=x+1 admet une seule solution $\propto$.

Vérifier que $2.15< \propto <2.2$.

c)Tracer les courbes (C_f) et (C_f^{-1})dans un même repère orthonormée.

d)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in K$.

3)En utilisant une intégration par parties calculer $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} xf'(x)dx$

<u>Exercice5(4pts)</u>

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 et P le plan contenant la droite(AC) et parallèle à la droite(DE).On munit l'espace du repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1)a)Vérifier que $\overrightarrow{AC}\Lambda\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

b)Donner alors une équation cartésienne du plan P.

2) Soit M et N deux points pris respectivement sur (AC) et (DE)tels que

$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DE}$ avec a et b sont deux réels.

a) Vérifier que M(a,a,0) et N(0,-b+1,b)

b) Déterminer a et b pour que $\overleftrightarrow{MN}\ et\ \overrightarrow{AC}\Lambda\overrightarrow{DE}$ soient colinéaires.

Pour la suite on prendra a = b = $\frac{1}{3}$.

3) Soit S la sphère de centre I $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

a)Vérifier que [MN] est un diamètre de S.

b)Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : z=0

c)Montrer que le plan (ABC) coupe S suivant un cercle dont on précisera le rayon r et les coordonnée de son centre J.

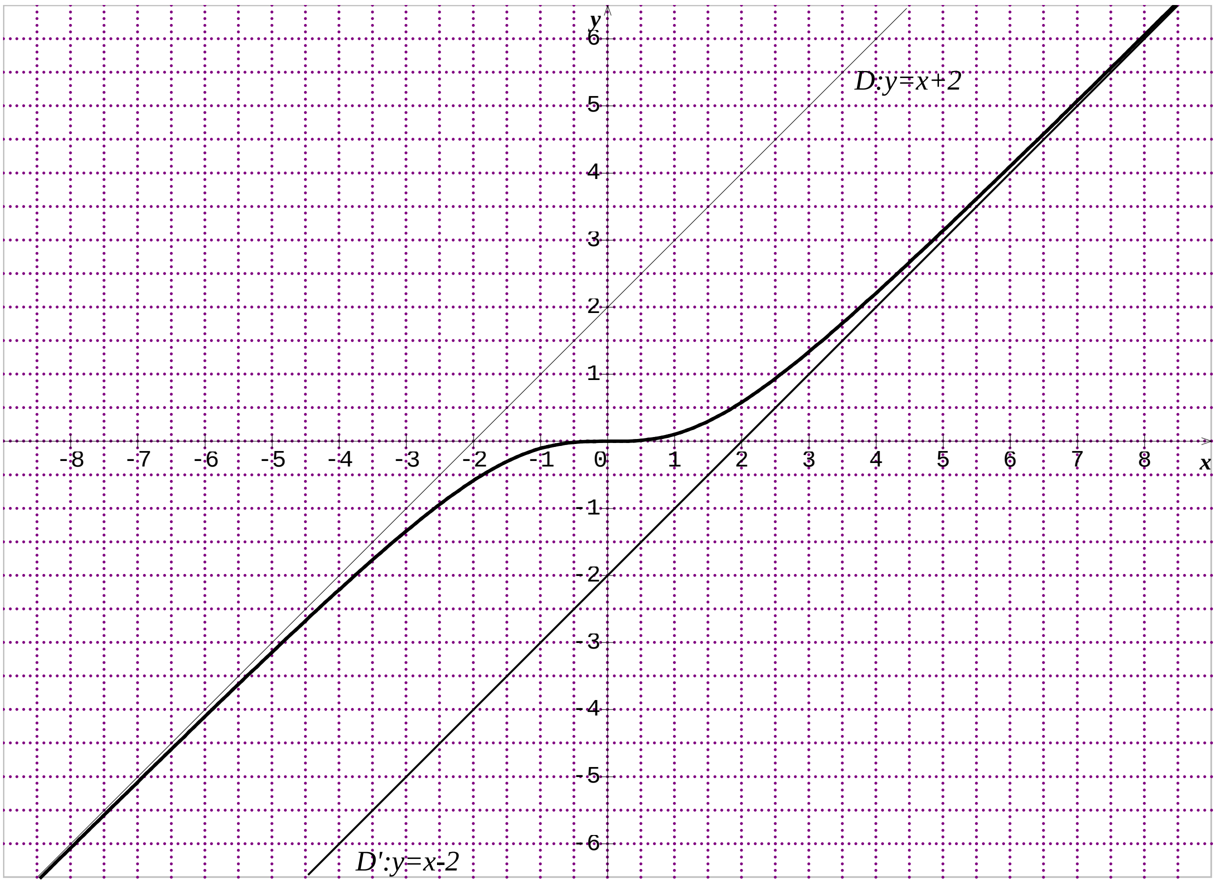
Feuille à rendre avec les copies.

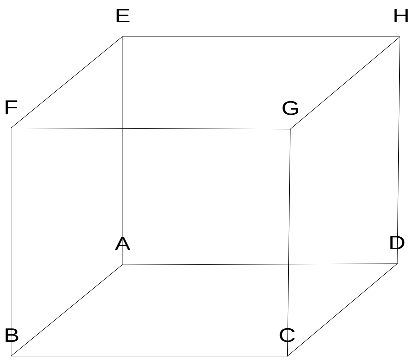
Nom :………………………………

Prénom :…………………………

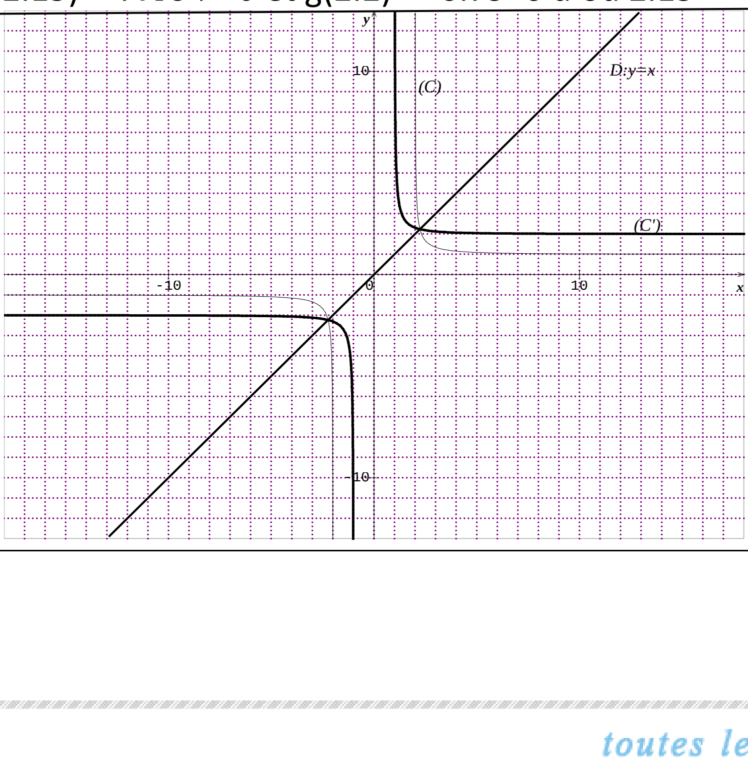
Classe :……………………

ANNEXE I




E
H
F
G
A
D
B
C

Exercice1 F- V-V-F	*4x0.75* (3x0.25 sans justification)
Exercice2 **1)** $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & + & \\ \hline f & -\infty & & \nearrow & & +\infty \end{array}$	0.5pts
2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ =1 et $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$=0	2x0.25
3)a)On a f est continue et strictement croissante sur IR d'où elle réalise une bijection de IR sur f(IR)=IR=J	0.5
b)	0.5
c) on (C) admet une tangente horizontale au point O d'où (c') admet une tangente verticale au point O d'où f^{-1} n'est pas dérivable en 0 .	0.25
4) a)	0.25
b) On a (C) est au dessus de D' et au dessous de D d'où x-2$\leq f(x) \leq x+2$ pour tout réels x.	0.25
c) On a x-2$\leq f(x) \leq x+2$ pour tout réels x. alors $\int_0^\lambda x-2\,dx \leq \int_0^\lambda f(x)\,dx \leq \int_0^\lambda x+2dx$ d'où le résultat	0.5
d) On a $\frac{\lambda^2}{2}-2\lambda \leq \mathcal{A}_\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2}+2\lambda$. $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2}{2}-2\lambda = +\infty = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2}{2}+2\lambda$ d'où $\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}_\lambda$ =+∞.	0.5
II)1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ =1=a et $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$=0=a+$\frac{b}{2} \Longrightarrow b=-2$.	2x0.25
2) $\mathcal{A}_\lambda$=$\int_0^\lambda x-\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$=$[\frac{1}{2}x^2-2\sqrt{x^2+4}]_0^\lambda$ =$\frac{1}{2}\lambda^2-2\sqrt{\lambda^2+4}$+4.	0.5
3)……….. 0.25	
Exercice3 **1)** I_0=$[\frac{-1}{\pi}\cos(\pi x)]_0^1$= $\frac{2}{\pi}$	0.5
2)a) on a $x\in[0,1] \Rightarrow \pi x\epsilon[0,\pi] \Rightarrow \sin(\pi x)\geq 0$ $X^{2n}\geq 0$pour tout $x\in[0,1]$ et pour tout entier n	

D'où $X^{2n}\sin(\pi x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout entier n d'où le résultat.	0.75
b) $I_{n+1}-I_n=\dots\dots\leq 0$ 0.5 (I_n) est décroissante et minorée par 0 d'où elle est cv.	
3)a) on a $X^{2n}\sin(\pi x) \leq x^{2n}$………… 0.5	
b) $0\leq I_n\leq \frac{1}{2n+1}$ ……….. 0.75	
<u>Exercice4</u> 1)a)…..	0.75
b) x 2 $+\infty$ $f'(x)$ $-$ $f(x)$ $+\infty \searrow 1$	0.75
2)a)On a f est continue et strictement croissante sur]2, +∞[d'où elle réalise une bijection de]2, +∞[sur f(]2, +∞[)=]1,+∞[=k	0.5
b) Soit g(x)=f(x)-x-1 pour tout réel x de]2, +∞[la fonction :x→-x-1 est une fonction polynôme d'où elle est dérivable sur IR en particulier sur]2,+∞[.Et on a f est dérivable sur]2, +∞[alors g est dérivable sur]2, +∞[. g'(x)=f'(x)-1<0 pour tout réels x.D'ou g est strictement décroissante sur]2, +∞[et on a g est continue sur]2,+ +∞[car elle est dérivable ainsi g est une bijection de]2,+ +∞[sur g(]2, +∞[)=IR et on a 0∈IR alors l'équation g(x)=0 admet une seule solution ∝∈]2,+∞[. g(2.15)$\simeq 7.46 > 0$ et g(2.2) ≃-0.79<0 d'où 2.15<∝$<$ 2.2.	0.75
c) 	1

d) $f^{-1}(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ pour tout x de K 0.75	
3) $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} xf'(x)dx = [xf(x)]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} - \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} f(x)dx$ 0.5 $=[xf(x) - \sqrt{x^2-4}\,]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}}$= -2.	
<u>Exercice5</u> 1)A(0,0,0) ,B(1,0,0),D(0,1,0), E(0,0,1) et C(1,1,0) a) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1-0\\-(1-0)\\-1\times 1\end{pmatrix}$ d'où le résultat.	0.5
b) $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P d'où P :x-y-z+d=0 avec d est un réel à déterminer A est un point de P d'où P :x-y-z=0.	1
2)a)M(a,a,0) et N(0,-b+1 ,b) b) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-a\\-b+1-a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{cases}-2b-a+1=0\\ a-b=0\\ -b-2a+1=0\end{cases}$ d'où a=b=$\frac{1}{3}$	1
3)a)M*N=I et IM=IN=$\frac{\sqrt{3}}{6}$ $M(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$ et $N(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$	0.5
b)	0.5
c)	0.5