DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

MATHEMATIQUES

Prof : Med Khairedine

Bac sciences

Exercice 1 :

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{3+3\ln x}{x}$

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a)Déterminer en justifiant $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.Interpréter graphiquement ces résultats

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{-3\ln x}{x^2}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $0.32 \prec \alpha \prec 0.34$

b)En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0,+\infty[$

3) Tracer (ζ_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 2:

Soit (I_n) la suite définie sur IN par : $I_n = \int_0^{\pi/6} x^n \sin 3x\, dx$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $I_n \geq 0$.

$b/$ Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

$c/$ En déduire que (I_n) est convergente.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $I_n \leq \int_0^{\pi/6} x^n\, dx$.

$b/$ Déterminer alors la limite de la suite (I_n).

3) $a/$ Calculer I_0 .

$b/$ En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_1 = \dfrac{1}{9}$.

$c/$ En effectuant deux intégrations par parties, montrer que :

pour tout $n \in IN$, $I_{n+2} = \dfrac{n+2}{9}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - (n+1)I_n\right)$.

Exercice 3:

Un magasin vend 1000 pochettes en cuir parmi lesquelles certaines sont défectueuses. Ces pochettes sont fabriquées par trois usines U_1, U_2 et U_2 selon le tableau suivant :

	Usine U_1	Usine U_2	Usine U_3
Nombre de pochettes	200	350	450
Pourcentage de pochettes défectueuses	5%	4%	2%

On choisit au hasard une pochette de ces 1000 pochettes et on considère les événements suivants :

A : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U_1 ».
B : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U_2 ».
C: « La pochette choisie est fabriquée par l'usine U_3 ».
D : « La pochette choisie est défectueuse ».

1. Dessiner l'arbre de probabilité correspondant à cette épreuve.

2. a) Prouver que la probabilité $P(D \cap A)$ est égale à $\frac{1}{100}$.

b) Calculer les probabilités suivantes : $P(D \cap B)$, $P(D \cap C)$ et $P(D)$.

3. Sachant que la pochette choisie n'est pas défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par l'usine U_1 ?

Exercice 4:

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

On a représenté dans la feuille annexe la courbe Γ de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. **Par une lecture graphique** : prouver que f est une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe Γ' de f^{-1} dans le même repère.

c. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

2. a. Vérifier que pour tout $x \neq 1$, $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1$

b. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(O;\vec{i})$, la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ et la courbe Γ.

3. Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=\int_0^{\sin^2(x)} f(t)\,dt$.

a. Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b. En déduire que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=x-\cos(x)\sin(x)$

c. Calculer alors l'aire de la partie hachurée.

d. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$, puis montrer que $I=1-\frac{\pi}{4}$.

Annexe

Exercice 4 :