

Exercice n°1 : (3 points)

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification.

1) $\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$ égal à : a) $\ln \sqrt{3}$ b) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ c) $\ln 3$

2) L'équation $2\ln x + 1 = 0$ admet comme solution : a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ c) \sqrt{e}

3) La fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln t dt$

F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : a) $F'(x) = 4\ln x$ b) $F'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ c) $F'(x) = 2x\ln x$

Exercice n°2 : (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$, $B(2,-1,1)$, $C(1,-1,2)$, $K(1,0,1)$ et $I(3,2,3)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ et déduire que A , B et C ne sont pas alignés.

b) Soit le plan $P = (ABC)$. Montrer que $P : x + y + z - 2 = 0$.

c) montrer que (IK) est perpendiculaire à P et que K est leur point d'intersection.

d) Que représente le point K ? Justifier votre réponse.

e) Montrer que K est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle ABC .

2) Soit l'ensemble $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 6z + 8 = 0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre I et dont on précisera son rayon.

b) Montrer que S et P sont sécantes et que $S \cap P = \zeta$.

3) Soit le point $J(-1,-2,-1)$.

a) Vérifier que K est le milieu du segment $[IJ]$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre J et sécante à P en ζ .

c) Calculer le volume du solide $IABCJ$ (hexaèdre) formé par les deux tétraèdres $IABC$ et $JABC$

Exercice n°3 : (6 points)

A) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1) Etudier les variations de g .

2) Calculer $g(1)$ puis déduire le tableau de signe de $g(x)$.

B) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ et on désigne par (C_f) la courbe de f

dans un repère orthonormé.

1) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

2) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ puis dresser le tableau de variation de f .

3) a) Montrer que la droite $D : y = x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position relative de (C_f) et D .

4) Tracer (C_f) et D .

C) Soit un réel $t \in [1, +\infty[$ et soit $A(t)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=t$.

1) Montrer que $A(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}(\ln t)^2 + \frac{1}{2}$.

2) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$.

Exercice n°4 : (6 points)

Soit la suite I définie sur \mathbb{N} par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1) a) Par une intégration par partie, montrer que : $I_{n+1} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(n+1)I_n$

b) Vérifier que $I_0 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$ puis déduire les valeurs de I_1 et I_2 .

2) Soit les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$ et $g(x) = x \ln x$. Le graphe ci-dessous représente les courbes (C_f) et (C_g) celles des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

a) Par calculs, déterminer les abscisses des points d'intersections de (C_f) et C_g .

b) Graphiquement, dresser le tableau de signe de $[f(x) - g(x)]$.

c) Soit A l'aire de la partie hachurée dans le graphe.

Montrer que $A = I_1 - I_2$ puis déduire sa valeur.

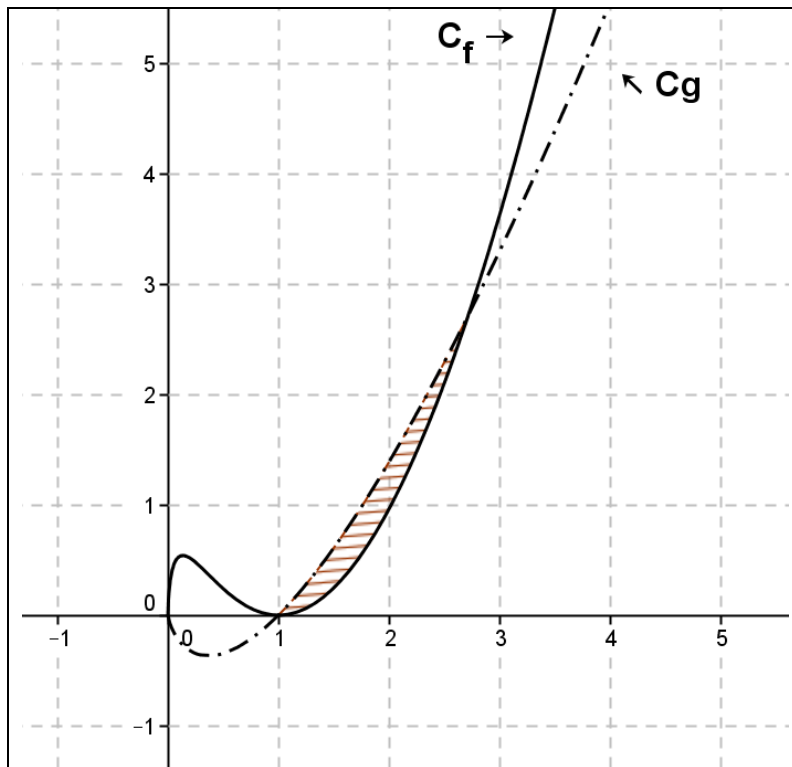
3) soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)^2 & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que F est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de F à droite en 0.

c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $F'(x) = f(x) - g(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de F .



Bon travail



