

Exercice1

Soit g une fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. Dans le graphique ci-joint (\mathcal{C}) désigne la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

*(\mathcal{C}) admet au point $A(1, -2)$ une tangente horizontale.

*(\mathcal{C}) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O; \vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$.

1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer $g(1)$; $g'(1)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $g'(x) \geq 0$.

c) Justifier que la restriction h de g à l'intervalle $[1; +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2) On suppose qu'il existe trois réels a, b et c tel que

$$g(x) = a x \ln(x^2) + b x + c \quad \forall x \in]0; +\infty[.$$

a) Montrer que $b+c=-2$; $2a+b=0$ et $c=0$.

b) En déduire que $g(x) = 2x \ln(x) - 2x \quad \forall x \in]0; +\infty[$.

c) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $g(x) = x$.

3) Tracer la courbe (\mathcal{C}') de h^{-1} dans le même repère.

4) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_e^{\sqrt{e^3}} x \ln(x) dx$.

5) Soit A_1 l'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = e$ et $x = \sqrt{e^3}$.

a) Montrer que $A_1 = \frac{1}{2} e^2$.

b) Soit (D) la partie du plan délimitée par (C) ; (C') et les axes du repère. Hachurer (D) puis calculer l'aire de (D).

Exercice 2

Soit la suite (I_n) définie sur \mathbb{N}^* par $I_n = \int_1^2 (x-1)^n \ln x dx$

1) a) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

b) En déduire qu'elle est convergente.

2) a) Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(n+1)I_n = \ln(2) - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

b) Montrer que $\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx \leq \frac{1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points A(0, 1, 0), B(1, 0, 0), C(0, 2, 1) et D(1, 0, -4)

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P puis écrire une équation cartésienne du plan P.

2) a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

3) a) Vérifier que le point I(1, 1, 1) est le centre du cercle (ζ) circonscrit au triangle ABC.

b) Donner une représentation paramétrique de l'axe Δ de (ζ) .

c) Soit Q le plan médiateur du segment [AD].

Montrer que $\Delta \cap Q = \{\Omega(4,4, -2)\}$.

4) Soit S la sphère de centre Ω et passant par A.

a) Ecrire une équation cartésienne de S.

b) Vérifier que B, C et D appartiennent à S

c) Ecrire une équation cartésienne du plan Q' tangent à S en B.

5) Soit le plan P' : $x+2y+2z-2=0$.

Montrer que P' coupe S suivant un cercle dont on précisera le rayon r et le centre H.

Exercice4

1) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) Calculer g(1). En déduire le signe de g(x) sur $]0; +\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x)=x-1 - \frac{\ln x}{x^2}$. On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \quad \forall x \in]0; +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que la droite D d'équation $y=x-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(+\infty)$.

b) Tracer (D) et (C).

Exercice5

Un groupe de 22 personnes décide d'aller deux samedis de suite pour dîner dans deux restaurants A et B. Le premier samedi, 8 personnes dans le restaurant A et les autres vont dîner dans le restaurant B.

Le deuxième samedi, 4 personnes décident de revenir dîner dans le restaurant A, 2 personnes vont revenir au restaurant B et les autres vont dîner dans le

restaurant qu'ils n'ont pas encore visité. **Après la deuxième diner ,on interroge au hasard une personne du groupe.**

On considère les évènements suivants :

A_1 « La personne a diné dans le restaurant A le premier samedi »

A_2 « La personne a diné dans la restaurant A le deuxième samedi »

B_1 « La personne a diné dans le restaurant B le premier samedi »

B_2 « La personne a diné dans la restaurant B le deuxième samedi »

1) Montrer que $P(A_1)=\frac{4}{11}$; $P(A_2/A_1)=\frac{1}{2}$ et $P(B_2/B_1)=\frac{1}{7}$.

2)a) Déterminer $P(A_2)$; $P(A_1 \cap A_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$.

b) Sachant que la personne interrogée à diner la deuxième samedi dans la restaurant B quelle est la probabilité qu'il est diné dans la restaurant A le premier samedi.

Feuille à rendre

Nom :.....

Prénom :.....

Classe :.....

N°.....

