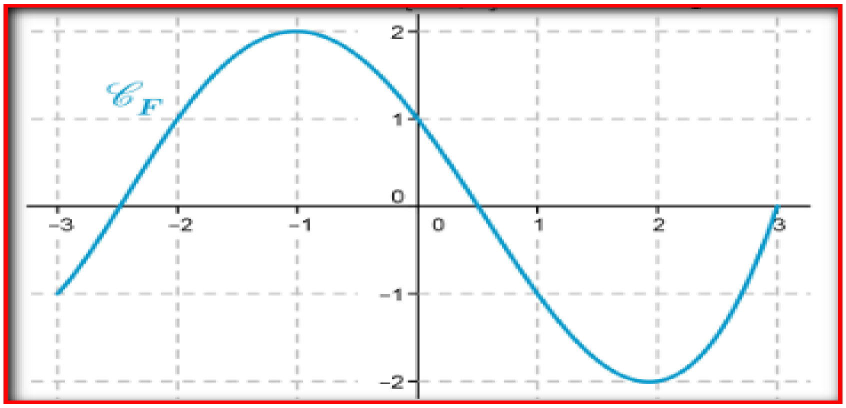
L-Mateur | Devoir de synthése :n°2 | Prof :Talbi Rachid
Classe : $4SC_1$ | Durée : $3h$ | Le 04 / 03 / 2015

EXERCICE $1(3pts)$

Soit f une fonction définie sur $[-3,3]$ et F une primitive de f . On a tracé la courbe de F ci-dessous:



1. Déterminer le tableau de signe de f sur $[-3,3]$.
2. Déterminer la valeur $\int_1^3 f(x)dx$.

EXERCICE $2(6pts)$

Partie A

Soit g la fonction défine sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2+3-2\ln x$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. Montrer que $g(x)>0$,$\forall\ x\in\,]0,+\infty[$

Partie B

Soit f la fonction défine sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x^2-1}{2x}$

1. (a) Calculer $f(1)$
   (b) Montrer que $f(e)=\dfrac{e^2+1}{2e}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.Interpéter graphiquement ce résultat.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
4. (a) Montrer que $\forall\ x\in\,]0,+\infty[,\ \ f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{2x}$
   (b) En déduire que la droite $\triangle: y=\dfrac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à ζ_f.
5. (a) Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique $\alpha\in\,]3,4[$

(b) Déterminer une équation de la tangente T à ζ_f au point d'abscisse 1.

(c) Tracer ζ_f , T et les asymtotes à ζ_f dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ d'unité graphique $2cm$.

6. Calculer, en cm^2,l'aire du domaine du plan limitée ζ_f , $\triangle$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

EXERCICE 3 ($5pts$)

Soient les intégrales suivantes: $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$

1. Soient f la fonction féfinie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

   (a) montrer que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

   (b) En déduire que $I = \frac{\ln\left(\sqrt{3}+2\right)}{2}$

2. (a) Vérifier que $J + 2I = K$

   (b) Montrer que $K = \sqrt{3} - J$ (On pourra faire une intégration par parties)

   (c) En déduire les valeurs de J et K.

EXERCICE 4 ($6pts$)

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ 3 un repère orthonormé directe et les points $A(2,0,0)$, $B(0,0,2)$ et $C(0,2,0)$.

1. (a) Faire une figure

   (b) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (c) Montrer que l'équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 2 = 0$.

2. (a) Le tétraèdre $OABC$ est-il régulier ?

   (b) Calculer son volume ϑ.

3. soit Q le plan passant par le milieu de $[AC]$ et perpendiculaire à (BC).

   (a) Montrer que $Q : y - z - 1 = 0$

   (b) Montrer que $Q \perp (ABC)$.

   (c) Déterminer une représentation paramétrique de $\Delta = Q \cap (ABC)$.

4. Soit $S = \{M\,(x,y,z)\,;\; x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0\}$.

   (a) Montrer que S est la sphère de de diamètre $[BC]$.

   (b) Montrer que S et Q sont sécants suivant un cercle ξ que l'on caractérisera.