

Devoir de synthèse N°2

LS :02/03/34

Goubellat

Date :12/05/2017

Classe : 4^{eme} année

Prof :Hamdi

Section: Sciences Expérimentales

Epreuve: Mathématique

Durée:3h

Coefficient:3

EXERCICE N° 1 (4 Pts)

Un athlète participe dans deux courses C_1 5000 mètres et C_2 10000 mètres

La probabilité pour que cet athlète gagne la première course C_1 est 0,4 ; celle pour qu'il gagne la course C_2 sachant qu'il a gagné la course C_1 est 0,6 et la probabilité pour que cet athlète gagne la course C_2 sachant qu'il n'a pas gagné la course C_1 est 0,2

On note par:

A " l'athlète gagne la course C_1 "

B " l'athlète gagne la course C_2 "

1 °) a ° / Donner un arbre qui illustre les données ci_ dessus

b ° / Calculer la probabilité pour que cet athlète gagne la course C_1 et la course C_2

c ° / Calculer la probabilité pour que cet athlète gagne la course C_2

d ° / Calculer la probabilité pour que cet athlète gagne la course C_1 sachant qu'il a gagné la course C_2

2 °) Lorsque l'athlète gagne la course C_1 il aura 100 mille dinars et lorsque il gagne la course C_2 il aura 150 mille dinars

Quel est le revenu moyen de cet athlète

3 °) Cet athlète participe dans ces deux courses C_1 et C_2 4 fois de suite ,le résultats de chaque participation est indépendant de l'autre

Calculer la probabilité pour que cet athlète gagne au moins deux fois les deux courses

EXERCICE N° 2 (4 Pts)

1 °) On considère dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $Z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})Z + 1 = 0$

avec $\theta \in]0, \pi [$

a ° / Calculer $(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2$

b ° / Résoudre l'équation (E)

2 °) On donne $P(Z) = Z^3 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 1)Z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 1)Z + 1$

a ° / Calculer $P(-1)$

b ° / Trouver les nombres complexes b et c tels que :

$$P(Z) = (Z + 1)(Z^2 + bZ + c)$$

c ° / En déduire les solutions de l'équation : $P (Z) = 0$

3 °) On donne dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé (O , \bar{U} , \bar{V})

les points A ; B et C d'affixes respectives $Z_A = -1 ; Z_B = e^{i \theta}$ et $Z_C = e^{-i \theta}$

a ° / Montrer que ABC est un triangle isocèle en A

b ° / Verifier que $\frac{e^{i \theta} + 1}{e^{-i \theta} + 1} = e^{i \theta}$

c ° / Trouver θ pour que ABC rectangle en A

EXERCICE N° 3 (4.5 Pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O , \bar{i} , \bar{J} , \bar{K})$, on considère les points

A (1 , 1 , 1) ; B (- 1 , 0 , - 5) et C tels que $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 2 \bar{i} + 2 \bar{J} - \bar{K}$

1 °) a ° / Verifier que les coordonnées de C est (0 , 1 , - 1)

b ° / Montrer que A , B et C forment un plan P d'équation : $2 x + 2 y - z - 3 = 0$

2 °) On donne D (2 , 2 , 2)

a ° / Montrer que l'aire de triangle ABC est $\frac{3}{2}$

b ° / Déterminer le volume de tétraèdre ABCD

c ° / En déduire la distance entre D et le plan P

3 °) Soit $S = \left\{ M (x , y , z) \text{ tel que : } x^2 + y^2 + z^2 + 2 x - 3 y + z + \frac{1}{2} = 0 \right\}$

a ° / Montrer que S est une sphère de centre I (- 1 , $\frac{3}{2}$, - $\frac{1}{2}$) et de rayon $\sqrt{3}$

b ° / Montrer S et P se coupent suivant un cercle ξ dont on déterminera le rayon

c ° / Déterminer la représentation paramétrique de la droite Δ passant par I et perpendiculaire à P

d ° / En déduire les coordonnées de point H centre de cercle ξ

EXERCICE N° 4 (2.5 Pts)

On considère les fonctions f et g définies sur $\left[\frac{\pi}{2} , \pi \right]$ par : $f (x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ et

$$g (x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 2 \cos x \sin x}$$

Soit $a \in \left[\frac{\pi}{2} , \pi \right]$; $C_1 = \left\{ M (x , y) \text{ tel que : } y = f (x) \text{ et } x \in \left[\frac{\pi}{2} , a \right] \right\}$ et

$C_2 = \left\{ M (x , y) \text{ tel que : } y = g (x) \text{ et } x \in \left[\frac{\pi}{2} , a \right] \right\}$

On désigne par V_1 le volume engendré par la rotation de C_1 autour de (OX) et par

V_2 le volume engendré par la rotation de C_2 autour de (OX)

1 °) Montrer que $V_1 = \pi \text{ Log} \left(\frac{2 a}{\pi} \right)$

2 °) Montrer que $V_2 = V_1 - \pi (\sin^2 a - 1)$

3 °) Déterminer a pour que $V_1 = V_2$

EXERCICE N° (5 Pts)

I °) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x e^x - 1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g(x)	-1	$-\frac{1}{e} - 1$	$+\infty$

Le tableau de variation illustre la fonction g(x) = x e^x - 1. La première ligne indique les valeurs de x : -∞, -1, et +∞. La deuxième ligne indique les valeurs correspondantes de g(x) : -1, -1/e - 1, et +∞. Des flèches indiquent que la fonction est décroissante de x = -∞ à x = -1, et croissante de x = -1 à x = +∞.

1 °) Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-1, +\infty[$

2 °) Vérifier que $\alpha \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

3 °) En déduire le signe de $g(x)$

II °) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - x}{e^x + 1}$

1 °) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; Interpréter graphiquement le résultat

2 °) a ° / Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b ° / Vérifier que $f(x) = \frac{x e^x + e^x}{e^x + 1} - x$

c ° / En déduire que C_f admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $(-\infty)$

d ° / Étudier la position relative de C_f et Δ

3 °) a ° / Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

b ° / Dresser le tableau de variation de f

4 °) a ° / Montrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha$

b ° / Tracer C_f et Δ

BONNE CHANCE