2016/2017

LYCÉE CHEBBI

DEVOIR DE SYNTHÈSE # 2

MATHÉMATIQUES

PR : SOLTANI MOHSEN

Le sujet comporte 3 *pages numérotés de* 1 *à* 3
Une copie non soignée sera sanctionnée.

Exercice 1 **(3 points)**

Répondre par "vrai" ou "faux"

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle $y' = 1 - y\ln(2)$ et $y(0) = -1$
   Alors : $\int_0^1 f(t) = \frac{f(1)}{\ln(2)}$
2. Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = e^{-x^2} - 1 + \left(\frac{e-1}{e}\right)x^2$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative.
   alors : $(\mathscr{C}_f)$ admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
   Alors : $p(\{-0.4 \leq X \leq 0.2\}) = 0.2$.
4. On considère la durée de vie en années, d'un appareil ménager est une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ tel que $p(T \leq 1) = 0,18$.
   Alors : $\lambda = \ln(\frac{50}{41})$.

Exercice 2 **(3 points)**

Une base de données d'un site de discussion contient les dates d'inscriptions des utilisateurs. Nous avons noté depuis 2010 le nombre d'inscriptions en milliers par année .

l'année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'inscriptions y	5	6.5	8.5	10	12	13.5	14.5

1. (a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. un ajustement affine est-il justifié.
   (b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
   (c) A combien estimez-vous le nombre d'inscription en 2020
   (d) Quand estimez-vous que le nombre d'inscriptions annuel dépassera un million.
2. On pose : $z = \ln(y)$.
   (a) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.
   (b) Déduire une écriture de y sous la forme $y = Ae^{Bx}$
   (c) A combien estimez-vous le nombre d'inscription en 2020.

Exercice 3 **(4 points)**

Un parachutiste de 80 kg s'élance d'une altitude de 1000 m avec une vitesse verticale initiale de $1m.s^{-1}$. La vitesse $V(t)$ du parachutiste à l'instant t vérifie l'équation différentielle : (E) : $V' = -V + 10$.

1. (a) Déterminer l'expression de $V(t)$ à l'aide de t.
   (b) Quelle est la vitesse limite que peut atteindre le parachutiste?
2. Soit $d(t)$ (t en second) la distance parcourue par le parachutiste depuis son saut. On rappelle que : pour tout $t \geq 0, d'(t) = V(t)$.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$; $d(t) = 10t - 9(1 - e^{-t})$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique t dans $[50.8, 51]$ tel que $d(t) = 500$ puis déduire à 10^{-1} de seconde près l'instant t_0 au bout duquel le parachutiste atteindra une altitude de $500m$ o'u il doit déclencher son parachute.

Exercice 4 **(5 points)**

A la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse non mortelle M,il a été procédé dans ce pays à une importante compagne de vaccination :

- 70% des habitants de A on été vaccinés.
- 5% des vaccinés et 60% des non vaccinés ont été touchées par la maladie.

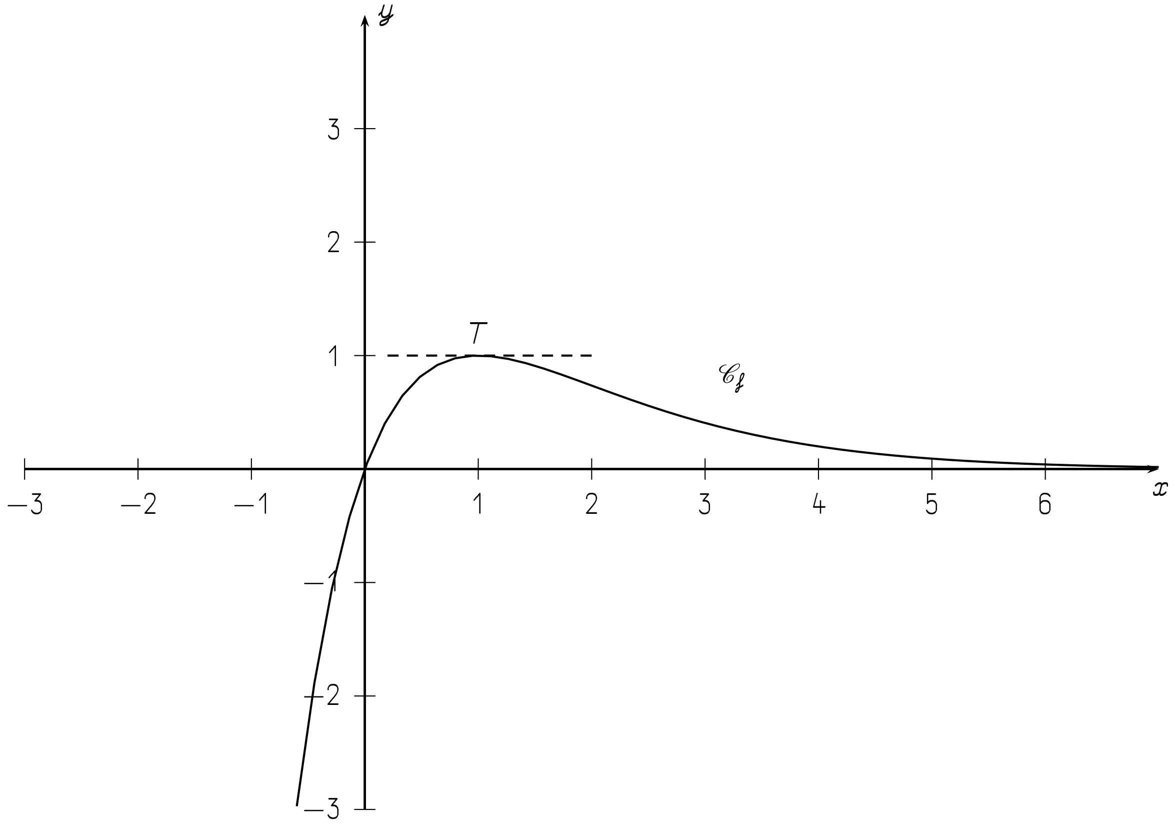
On note : M :"l'individu est malade". V :"l'individu est vacciné"

1. (a) Donner l'arbre de probabilité qui modélise cette situation.
   (b) Montrer que $p(M) = 0.215$
   (c) Déterminer la probabilité pour qu'un individu ait été vacciné,sachant qu'il a été atteint par cette maladie.
2. Les séquelles laissées par cette maladie M sont variées mais on admet que 2% des individus malades ont subi des lésions de la vue: on réalise une enquête sur n anciens malades d'un secteur donné.On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus souffrant de lésions de la vue parmi eux.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Quelle est la plus petite des valeurs de n réalisant : $p(X \geq 1) \geq 0.95$.
3. On suppose qu'un virus responsable à cette maladie a une durée de vie T exprimée en jours qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   (a) Déterminer λ sachant que $p(T \geq 5) = 0.4$.
   (b) Sachant que le virus a persisté plus que 5 jours, quelle est la probabilité qu'il persiste plus qu'une semaine.
   (c) Déterminer, en jours (en heure prés), le temps t tel que $p(T \geq t) = p(T \leq t)$.

Exercice 5 **(5 points)**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe ci-dessous $(\mathscr{C}_f)$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et tel que :

- $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique infinie de direction $(O; \vec{j})$au voisinage de $-\infty$.
- T la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
- l'axe des abscisses est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.



1. Donner : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $f(1)$; $f'(1)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est celle de la fonction $f(x) = xe^{1-x}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathscr{A}_n$ la mesure d'aire du domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations respectives : $y = 0, x = 1$ et $x = n$.
   (a) Montrer que $\mathscr{A}_n = 2 - (n+1)e^{1-n}$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n$
4. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$.
   (a) Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $\quad f(k) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)dt$.
   (b) En déduire que $V_n \leq 3$.
   (c) Prouver que (V_n) est convergente.