

<i>Lycée Ibn Sina Mahdia</i>	<i>Discipline :Mathématiques</i>	<i>Profs:M.BAYOUDHI-G.SFAXI</i>	
<i>Date :6/03/2019</i>	<i>Devoir de synthèse N°2</i>	<i>Niveau:4^{ème}Sc</i>	<i>Durée:3h</i>

Exercice N°1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé .

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que sa courbe (C) passe par les points $A(1,0)$ et $B(5,2\ln 2)$.

Dans la figure ci- contre ,on a représenté la courbe (C') de la dérivée f' de la fonction f .

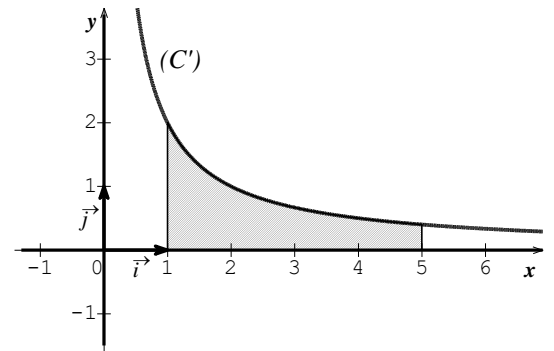
Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant** la réponse.

1/ (C) admet une tangente horizontale.

2/Une équation cartésienne de la tangente à (C) au point A est : $2x-y-2=0$.

3/L'aire de la partie hachurée est égale à $2\ln 2$.

4/Pour tous réels a et b de $[1,5]$, $|f(b) - f(a)| \leq 2|b - a|$.



Exercice N°2 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln^3(x) - 3\ln(x)$.

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1/Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

2/Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

3/a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4/ Tracer la courbe (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\frac{1}{e}, e]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, e]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer (C') la courbe représentative de g^{-1} sur le même repère.



6/ Soit la suite (a_n) définie sur \mathbb{N}^* par $a_n = \int_1^e \ln^n(x) dx$.

a) Calculer a_1 .

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = e^{-(n+1)} a_n.$$

c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.

7/ Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites

$$x = -2 \text{ et } x = 0.$$

a) Calculer $\int_1^e f(x) dx$.

b) En déduire \mathcal{A} .

Exercice N°3 (7 points)

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,1)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,1,-1)$.

1/a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que A, B et C déterminent un plan unique P dont une équation cartésienne est $x + y + 2z - 4 = 0$.

2/ Calculer le volume \mathcal{V} du tétraèdre $ABCI$.

3/ Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 8 = 0.$$

Prouver que S est une sphère de centre I et préciser son rayon.

4/a) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle C dont on précisera le rayon.

b) Vérifier que $[BC]$ est un diamètre du cercle C . En déduire les coordonnées du point H centre du cercle C .

5/ Soient α un réel et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 11\alpha^2 - 8\alpha - 3$.

b) En déduire que la droite (AB) recoupe le cercle C au point E défini par

$$\overrightarrow{AE} = \frac{-3}{11} \overrightarrow{AB}.$$

c) Montrer que le volume \mathcal{V}' du tétraèdre $AECI$ est égale à $\frac{3}{11} \mathcal{V}$.

6/a) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par I et parallèle à P .

b) Prouver que pour tout point M_0 du plan Q le volume du tétraèdre $ABCM_0$ est constant.



Exercice N°4 (3 points)

Soit F la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

1/Montrer que F est dérivable sur $] -1, 1[$ et déterminer sa fonction dérivée.

2/Montrer que F est impaire.

3/Soit H la fonction définie sur $] 0, \pi[$ par $H(x) = F(\cos x) = \int_0^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

a) Montrer que H est dérivable sur $] 0, \pi[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que $\forall x \in] 0, \pi[$, $H(x) = \frac{\pi}{2} - x$.

c) Déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.