

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit (l_n) la suite définie sur N par :

. $l_0 = \int_1^e \frac{dx}{x^2}$ et $l_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$ pour tout $n \in N^*$

1) a) Calculer l_0

. b) Montrer que (l_n) est positive et décroissante.

. En déduire qu'elle est convergente.

2)a) Montrer par une intégration par parties que:

. pour tout $n \in N^*$, $l_{n+1} = (n+1)l_n - \frac{1}{e}$

. b) En déduire que pour tout $n \in N^*$, $nl_n \leq \frac{1}{e}$

. calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$.

3)

a) Montrer que pour tout $n \in N^*$: $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1}$.

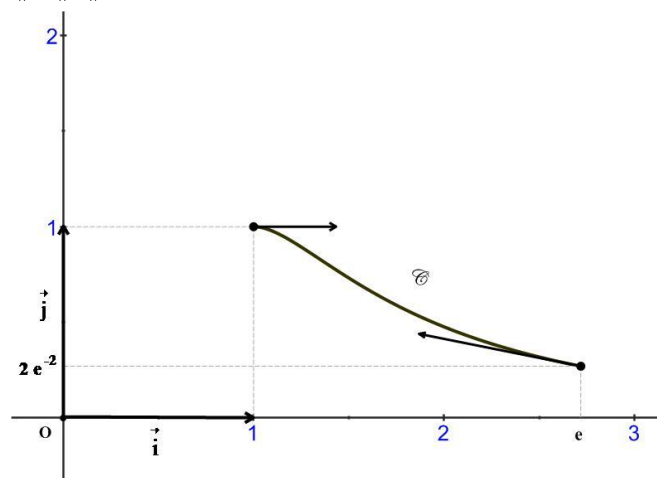
b) En déduire que pour tout $n \in N^*$: $\frac{1}{(n+1)e} \leq l_n$.

. calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nl_n$

4) Ci-dessous est la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f

définie sur $[1;e]$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$, dans un repère orthonormé

(O, \vec{i}, \vec{j}) tel que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$



a) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations : $y=0$, $x=1$ et $x=e$.



- b) Montrer que f est bijective de $[1;e]$ sur un intervalle J à déterminer .
- c) Construire dans l'annexe ci-joint la courbe \mathcal{C}' représentative de la fonction g réciproque de f .
- c) Calculer l'aire \mathcal{H}' de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C}' et les droites d'équations : $y=1, x=2e^{-2}$.

EXERCICE 2 : (5 points)

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

I- On note :

- . D l'évènement « le composant est défectueux ».
 - . F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur ».
 - . F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».
- 1) Dresser un arbre pondéré.
 - 2) Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.
 - 3) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur?
 - 4) Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins 1 d'entre eux soit défectueux ?

II- La durée de vie en années, de l'un de ces composants, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec λ un réel strictement positif.

- 1) Sachant que $p(X \leq 3) = p(X > 3)$ déterminer λ .

Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

- 2) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?.

EXERCICE 3 : (3 points)

Une entreprise teste la rentabilité d'un produit selon sa durée de vie Y en fonction du nombre d'utilisations annuel X . On suppose que ce produit est destiné à une utilisation professionnelle très élevée.

X (en centaine de fois)	0	0,5	1	1,5	2	3	5	6	7
Y (en années)	10	8	6	5	4	2	1	0,5	0,25

- 1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r .
 . Un ajustement affine est -il apprécié ?
- 2) Déterminer l'équation de la droite de régression D de Y en X .
- 3) En utilisant l'équation de la droite D :
 - *) Déterminer le nombre d'utilisations annuel de ce produit pour que sa durée de vie soit 9 ans.
 - ***) Déterminer la durée de vie de ce produit lorsque son utilisation

annuelle est égale à 800 fois.

EXERCICE 4 : (6 points)

I-

- 1) Résoudre l'équation différentielle $(E_1): y' + y = 0$, où y est une fonction dérivable sur R .
- 2) On considère l'équation différentielle $(E_2): y' + y = e^{-x}$.
 - a) Vérifier que $f(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation (E_2) .
 - b) Montrer que la fonction g est solution de l'équation (E_2) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E_1) .
 - c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) .
 - d) Déterminer la solution h de (E_2) vérifiant : $h(1) = 0$

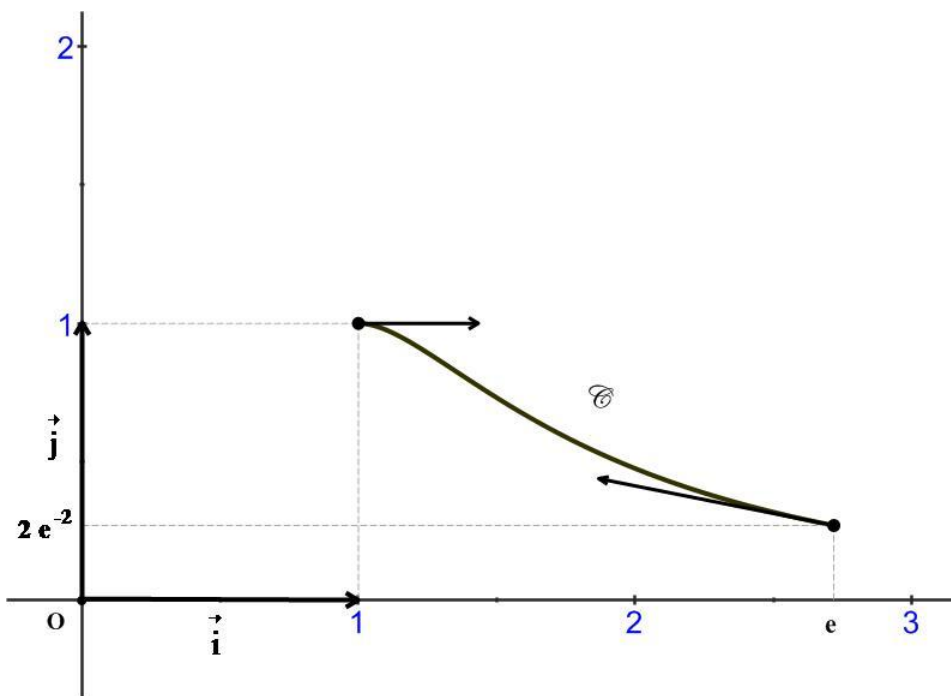
II- Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = (x - 1)e^{-x}$

On désigne par ξ_h sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'unité graphique est 2cm en abscisses et 4cm en ordonnées.

- 1) a) Etudier les variations de h .
 - b) Donner une équation de la tangente T à la courbe ξ_h au point d'abscisse 1.
 - c) Etudier la position relative de ξ_h par rapport à T .
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat
- b) Tracer T et ξ_h

Figure Exercice n° 1 :



Annexe à rendre
avec la copie

Classe :

.....

Nom et prénom :

.....

.....

