

Devoir de synthèse 2**4 Science expérimental 1-2**

Durée : 3 heures

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du pourcentage des faux comptes facebook en tunisie de 2009 à 2017. La variable X désigne le rang de l'année et Y le pourcentage de faux comptes facebook

Tous les résultats seront arrondies à 10^{-2} près.

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Rang de l'année X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage Y	85	78	73	66	57	51	47	44	43
Z = ln(Y).	4.44	4,35	4,29	4,18	4,04	3,93	3,85	3,78	3,76

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X,Y) dans un repère orthogonal puis placer le point moyen du nuage .

2) a) Calculer le coefficient de corrélation. Un ajustement affine est-il justifié ?

b) Déterminer la droite de régression de Y en X.

b) Donner une estimation du pourcentage faux comptes facebook en 2020.

3) Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points .Pour cela, on pose : $Z = \ln(Y)$.

a) Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X.

En déduire l'expression de Y en X.

b) Donner une estimation du pourcentage de faux comptes facebook en 2020.



Exercice 2

Un propriétaire d'un complexe sportif louant des terrains de foot s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains.

Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine).

Dans le cadre de cette répartition, 70% des heures sont creuses.

Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20% des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90% des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les événements :

- C : "l'heure est creuse" O : "le terrain est occupé"

- 1) Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
- 2) Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
- 3) Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
- 4) Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale $\frac{27}{41}$.
- 5) le vendredi 12 mai 2017 le propriétaire fait une inspection du complexe à 9h du matin. Soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre de terrain occupé à l'instant de la visite.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance.
 - b) Déterminer la probabilité que la moitié des terrains soient occupés.
- 6) Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :
 - ... ◊ 10 dinars pour une heure pleine,
 - ... ◊ 6 dinars pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en dinars obtenue grâce à la location d'un terrain de ce complexe, choisi au hasard.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X
- b) Déterminer l'espérance de X.
- c) Le complexe comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de ce complexe.

A) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé relativement au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite $\Delta: y = x + 1$ la courbe (Γ) d'équation $y = e^x$ et la courbe (Γ') d'équation $y = \ln x$

- 1) Par lecture graphique
 - a) Montrer que Pour tout $x \in \mathbb{R} : e^x \geq x + 1$
 - b) En déduire que Pour tout $x \in]0, +\infty[: \ln x \leq x - 1$
- 2) Montrer alors que Pour tout $x \in]0, +\infty[: e^x - \ln x \geq 2$

B) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{C}_f la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 5cm)

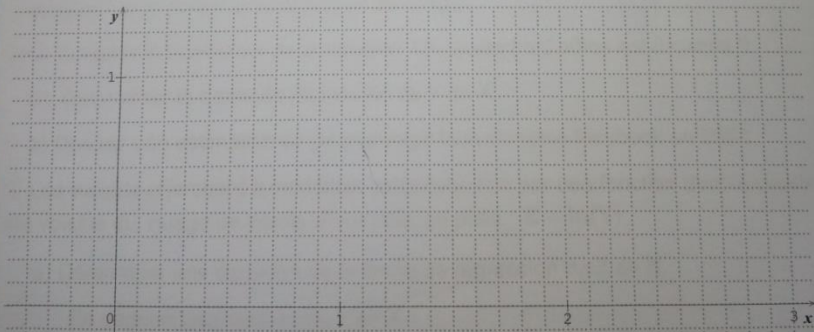
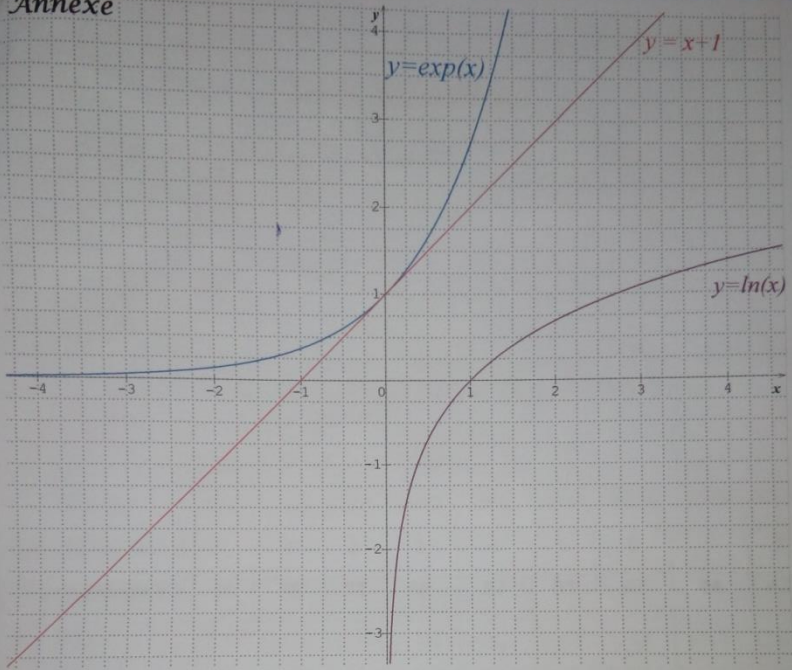
- 1) a) Montrer que f est continue dérivable à droite de 0
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) On donne le tableau de variation de la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = (1-x)e^x - \ln x + 1$$

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-
$\varphi(x)$	$+\infty$	$-\infty$

- a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$ et vérifier que $1.23 < \alpha < 1.24$
 - b) Déterminer le signe de $\varphi(x)$.
 - 3) a) Montrer que pour tout $x > 0 : f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - \ln x)^2}$
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
 - c) Tracer \mathcal{C}_f (on prendra $f(\alpha) = 0.4$)
- C)** On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $U_n = \int_1^n f(x) dx$
- 1) Donner une interprétation géométrique de U_n .
 - 2) Etudier le sens de variation de la suite (U_n) .
 - 3) Soit la fonction Ψ définie sur $[1, +\infty[$ par $\Psi(x) = e^x - x \cdot \ln x - \ln x$
 - a) Calculer $\Psi'(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$ et montrer que $\Psi'(x) \geq 0$ (**Utiliser A-2**)
 - b) En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[: \Psi(x) \geq 0$.
 - c) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[: xe^{-x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{e^x}$.
 - 4) En effectuant une intégration par parties, calculer en fonction de n les deux intégrales $I_n = \int_1^n xe^{-x} dx$ et $J_n = \int_1^n (1+x)e^{-x} dx$
 - 5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : I_n \leq U_n \leq J_n$.
 - 6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : U_n \leq \frac{3}{e}$.
 - b) En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel L , et que $\frac{2}{e} \leq L \leq \frac{3}{e}$.

Annexe



Feuille à rendre avec la copie