Lycée : Feriana

Hamdi Mabrouk

14/05/ 2010

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3

MATHÉMATIQUES

4sciences

Durée : 3heure

Exercice 1(3pts)

Pour chaque question, une et une seule des 3 propositions a, b, et c est exacte.
On demande d'indiquer laquelle sans aucune justification

1) L'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$

Soit h la solution particulière de (E) dont la courbe représentative admet une tangente de coefficient directeur -1 au point d'abscisse 2 alors :

a) $h(x) = e^{\frac{-x+2}{2}}$ b) $h(x) = e^{-x+2}$ c) $h(x) = 2e^{\frac{-x+2}{2}}$

2) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.la dérivée f'', dérivée seconde de la fonction f sur IR, est définie par :

a) $f''(x) = -2x\,e^{-x^2}$ b) $f''(x) = e^{-x^2}$ c) $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2}dt$

3) X une variables aléatoire qui suit, une la loi binomial de paramètres 3 et $p \in]0,1[$; F la fonction de répartition de X alors $F(1) =$

a) $C_3^1 p^2(1-p)$ b) $(1-p)^2(1+2p)$ c) $1- p^3$

Exercice 2(3pts)

Le tableau ci-dessous donne les chiffres d'affaires y exprimés en milliers de DT d'une entreprise durant six années consécutives :

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année xi	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaires yi	150	180	200	225	265	300

1) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points $(x_i ; y_i)$ associé à cette série.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série et placer ce point dans le même repère.

3) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de y en x.

Tracer cette droite dans le repère précédent.

4) On suppose que l'évolution du chiffre d'affaires suit le même modèle jusqu'en 2015.

a- Quel est le chiffre d'affaires en 2010 ?

b- A partir de quelle année le chiffre d'affaires de cette entreprise dépassera-t-il pour la première fois 450 milliers de DT ?

Exercice 3(4,25pts)

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $\mathbf{f(x) = (20x + 10)e^{\frac{-x}{2}}}$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

A- 1) Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3) Etablir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Dans la suite de l'exercice on prendra $\alpha = 4,673$.

4) Tracer la courbe C.

5) Calculer l'intégrale I = $\int_0^3 f(x)dx$

B -On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{\frac{-1}{2}t}$.

1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2) On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant t =0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant
$g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$(E_0) : y' + \frac{1}{2}y = 0$

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0).

c) Conclure

3) Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4) La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne de cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.
Calculer la valeur exacte de θ.

Exercice 4(4,25pts)

Une fabrique artisanale de jouets vérifie la qualité de sa production avant de sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : la finition et le test de solidité .Il s'avère à la suite d'un grand nombre de vérifications que :

- 90% des jouets sont sans défaut de finition ; Parmi ces jouets sans défaut de finition 95% réussissent le test de solidité.
- 2% des jouets produits contiennent des défauts de finition et ne sont pas solides.

On prend au hasard un jouet ; on note

F « le jouet est sans défaut de finition » et S « le jouet réussit le test de solidité »

1) Determiner: p(F) , p(S/F) , p($\overline{F} \cap \overline{S}$) et p($\overline{S}/\overline{F}$) .
2) Modéliser cette situation par un arbre pondéré.
3) Montrer que p(S) = 0,935.
4) Un jouet a réussi le test de solidité, quelle est la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

5) La durée de vie en années de l'un des jouets jusqu'à ce qui survienne la première panne est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

a) Sachant que p($X \leq 10$) = p($X > 10$), calculer λ.

Dans la suite on prendra $\lambda = 0,07$

b) Quelle est la probabilité qu'un jouet dure plus que 5 ans

c) Quelle est la probabilité qu'un jouet dure plus que 5 ans sachant qu'il n'a pas tomber en panne durant les deux premières années.

Exercices 5 (5,5pts)

A- Soit f la fonction définie sur IR par f (x) = x + xe^{-x} et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *(unité 2 cm).*

1) a- Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) a- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b- Dresser le tableau de variations de f ' et en déduire que f ' (x) > 0.

c- Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

d- Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (d) d'équation y = x.

4) Tracer (d), (T) et (C).

5) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'asymptote (d) et les deux droites d'équations x = 0 et x = 1.

6) On désigne par g la fonction réciproque de f et par (G) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Préciser l'asymptote et la direction asymptotique de (G) et tracer (G).

B- Soit f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x) = x + x^n e^{-x}$ (n est un entier naturel non nul) et soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 [f_n(x) - x]\,dx$.

1) Déterminer la valeur de U_1.

2) Montrer que $0 \leq x^n e^{-x} \leq 1$ sur [0 ; 1] et en déduire que la suite (U_n) est bornée.

3) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante. La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier