Lycée pilote 7novembre de Monastir

BACCALAUREAT

SCIENCES EXPERIMENTALES

SCIENCES EXPERIMENTALES

***

Devoir de synthèse n°3

***

Mathématiques

14/05/2010

Durée de l'épreuve : 3 heures – coéfficient 3

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Ce sujet comporte 05 exercices

Exercice	Barème
1	3 points
2	4 points
3	4 points
4	4 points
5	5 points

NB : On tiendra compte de la rédaction et de la clarté du raisonnement dans l'appréciation des copies.

Proposé par les professeurs:

Hassine.M - Trimèch-M

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

Exercice 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux

1. Une urne contient 1 jeton rouge et 5 jetons blancs indiscernables au toucher.
On effectue 10 tirages successives avec remise.
Soit X la variable aléatoire prennant pour valeur le nombre de jetons blancs tirés.

- p($X \geq 1$)= $\dfrac{6^{10}-1}{6^{10}}$.

2. La droite de régression de Y par rapport à X est $(D): Y = 4.6\,X$
La droite de régression de X par rapport à Y est $(D'): 5X = Y + 2$

- La corrélation linéaire est forte.

3. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [0,1] alors la probabilité pour qu'un réel x choisi au hasard est solution de l'inéquation $15x^2 - 8x + 1 \leq 0$ est :

- $\dfrac{2}{15}$

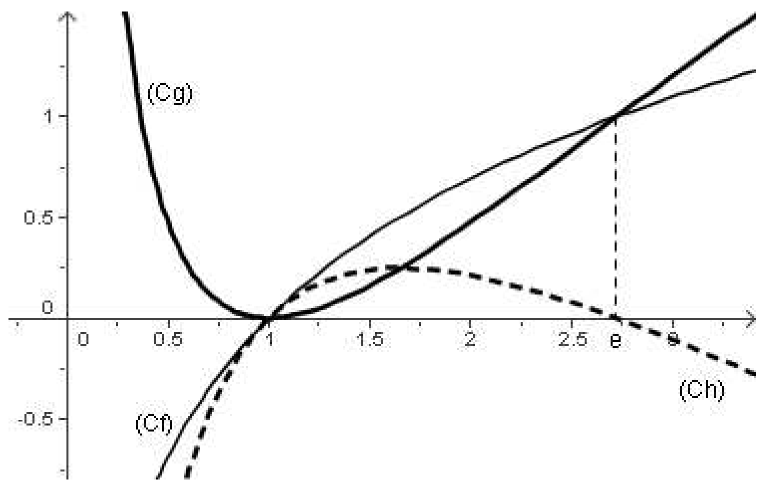
4. Un contrôle de qualité a montré qu'un article pouvait présenter deux types de défaut indépendants a ou b.
On note D_a: l'article présente le défaut a.
D_b : l'article présente le défaut b.
La probabilité qu'un article présente un seul défaut est égale à :

- $p(D_a)+p(D_b)-2p(D_a)p(D_b)$.

5. Soit f une fonction dérivable sur IR telle que $f(-1) = 0$ alors :

- $\int_0^1 xf'(-x)dx = \int_0^1 f(-x)dx$

6. Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions $f(x) = \ln x$
$g(x) = \ln^2 x$ et $h(x) = f(x) - g(x)$.



$\mathscr{A}_1$: L'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f , g et h et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
$\mathscr{A}_2$: L'aire de la partie du plan limitée par les courbes de h et g et les droites d'équations $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$.

- $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

Exercice 2 (4 points)

Partie A

Un test de dépistage d'une maladie responsable à la disparition des lapins a fournit les renseignements suivantes :

- 70°/o des lapins sont malades.
- si un lapin est malade, le test est positif dans 93°/o des cas.
- si un lapin n'est pas malade, le test est positif dans 5°/o des cas.

1. a. Donner l'arbre de probabilité qui modélise cette situation.
   b. Déterminer la probabilité que le test est positif.
2. Sachant que le test est positif, déterminer la probabilité qu'un lapin soit malade.
3. On choisit au hasard 5 lapins.
   Déterminer la probabilité que 4 lapins ont un test negatif.

Partie B

On suppose qu'un virus responsable à cette maladie a une durée de vie X exprimée en heures qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

La durée moyenne de vie d'un virus est donnée par $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

1. a. A l'aide d'une integration par parties, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$.
   b. Dans la suite, la durée moyenne de vie d'un virus étant de 100 heures. Déterminer la probabilité que le virus persiste dans l'organisme du lapin plus que 4 jours.
   c. Sachant que le virus a persisté plus que 4 jours, quelle est la probabilité qu'il persiste moins qu'une semaine.
2. a. Déterminer, en jours et à une heure près, le temps t telque $p(X \geq t) = p(X \leq t)$
   b. Définir puis réprèsenter la fonction de repartition de X.

Exercice 3 (4 points)

Une maison d'édition a ouvert le 1er janvier 2002 sur internet un site de vente par correspondance.

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois en milliers.

Mois	Janvier 2002	Janvier 2003	Juillet 2003	Janvier 2004	Juillet 2004
Rang du mois X_i	1	13	19	25	31
Nombre de livres Y_i	3.2	4.5	5.5	7.1	8

1. Représenter le nuage de points (X_i,Y_i) dans un repère orthogonal (unités graphique : 1cm représente deux mois en abscisse et 1 cm représente 500 livres en ordonnée)
2. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel plutôt qu'un ajustement affine. Pour cela, on pose $Z_i=\ln(Y_i)$.

Après l'avoir recopier, compléter le tableau suivant où Z_i est arrondi à 10^{-3}.

Rang du mois X_i	1	13	19	25	31
$Z_i=\ln(Y_i)$.					

3. Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine (D) de Z en X par la méthode des moindres carrés.
4. En déduire une relation entre Y et X de la forme $Y = \alpha e^{kX}$.
5. En supposant que l'évolution se poursuivre de cette façon :
   a. Donner une estimation à l'unité prés du nombre de livres qui seront vendus en Janvier 2005.
   b. A partir de quel mois peut-on prévoir que le nombre de livres vendus dépasse 13000 ?

Devoir.tn Toutes les matières, tous les niveaux...

Exercice 4 (4 points)

On considère l'équation différentielle : $(E): y' - 2y = 2x^2e^x$.

1. a. Résoudre dans IR l'équation différentielle: $(E_0): y' - 2y = 0$
   b. Soit f(x) un trinôme du second degré.
   Déterminer f(x) pour que la fonction $f_1 : x \mapsto f(x)e^x$ soit solution de (E).
2. Soit g une fonction dérivable sur IR.
   a. Montre que : g est solution de (E) si et seulement si $g - f_1$ est solution de (E_0)
   b. Résoudre alors l'équation (E).
3. Soit h une solution de (E) vérifiant $h(x) \neq 0$ pour tout réel x.
   On pose $\varphi(x) = \dfrac{1}{h(x)}$
   a. Montrer que φ est une solution de l'équation $(E'): y' + 2y + 2x^2e^x y^2 = 0$
   b. Résoudre alors l'équation différentielle (E')

Exercice 5 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		0
f'(x)		−	‖
f(x)	1	↘	0

   Tracer $(\mathcal{C})$ et la demi-tangente à l'origine du repère. (unité graphique 1cm)
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[0, 1[$.
   b. Tracer $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Justifier, graphiquement, la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0.
4. a. Montrer que, pour $x \in [0, 1[$, $f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)$.
   b. Montrer que la fonction $F(x) = (x - 1)\ln(1 - x) + (x + 1)\ln(x + 1) - 2x$ est une primitive de f^{-1} sur $[0, 1[$.
   c. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $y = -\ln 2$, $x = 0$ et $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Calculer $\mathcal{A}$..
   d. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1 - e^x}\,dx$.
5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet le réel $x_n = \ln(1 - \dfrac{1}{n^2})$ l'unique solution dans $]-\infty, 0]$.
   b. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 x_n = -1$.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...