Lycée : IBN EL MANDOUR BORJ EL AMRI ******* 4ème ASC exp	**Devoir de Synthèse N°3** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** 14/05/2010 **DUREE : 3 HEURES** *Sai-Boubakri*

Exercice n°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou absence de la réponse vaut 0 point.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ **est égale :**

$\boxed{a}$ **1** $\boxed{b}$ **2** $\boxed{c}$ $\dfrac{1}{2}$

2. **a et b deux réels strictement positifs alors** $e^{\ln(a)} + e^{-\ln(b)}$ **est égal à :**

$\boxed{a}$ **- ab** $\boxed{b}$ $\dfrac{ab+1}{b}$ $\boxed{c}$ **a-b**

3. **La durée de vie, exprimée en année, d'une machine suit une loi exponentielle de paramètre** λ **=0,4.**
La probabilité qu'une machine soit encore en état de marche après 6 années est:

$\boxed{a}$ $e^{-2,4}$ $\boxed{b}$ $1-e^{-2,4}$ $\boxed{c}$ $1+e^{-2,4}$

Exercice n°2 (5 points)

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On fait tirer à un joueur des boules de l'urne.

À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 dinars et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3dinars.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

<u>Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.</u>

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a) Montrer que: p(X =-1) = $\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$

b) Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c)Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

E(X) = $\dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$

d) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2) Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que n = 1000. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges. Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche. Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi:

Pour tout $k \in \mathbb{N} : P(Z \le k) = \int_0^k 0,01\, e^{-0,01x} dx$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.
a)Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \le 50)$ ***.***
b) Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement: "le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche" sachant l'évènement "le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche".

Exercice n°3 (6 points)

A) Soit l'équation différentielle (E): $y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$ ***pour tout*** $x \in \left]0,+\infty\right[$ ***.***

1) **Montrer que la fonction :g définie sur** $\left]0,+\infty\right[$ ***par*** $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$ ***est une solution de (E)*** **.**

2) **(Montrer qu'une fonction f définie sur** $\left]0,+\infty\right[$ ***est une solution de (E)*****) signifie que ((f-g) est solution de** $E_0 : y - y' = 0$ ***).***

3) **a)Résoudre l'équation** E_0 ***.***

b) En déduire les solutions de (E).

c)Vérifier que la solution h de E) tel que h(1)=0 est donnée par :

$$h(x) = \frac{(-x+1)e^x}{x} \quad \forall x \in \left]0,+\infty\right[$$ ***.***

B)

1) Dresser le tableau de variation de h.

2) Soit : $A(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} \dfrac{e^x}{x} dx \qquad (\alpha \succ 1)$

a) Interpréter graphiquement $A(\alpha)$ ***.***

b) **F est une primitive de** $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ ***sur*** $\left]0,+\infty\right[$ ***.***

Vérifier que : $A(\alpha) = F(\alpha+1) - F(\alpha)\ \forall \alpha \in \left]1,+\infty\right[$ ***.***

c) **En déduire le sens de variation de la fonction**

$$A :]1,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha \mapsto A(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{e^x}{x} dx$$

Exercice n°4 (6 points) :

A) Lecture graphique :

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ **par :** $f(x) = a + x\ln(b+x)$ **.**

(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ **.**

1) **Donner f(0), f'(0),** $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$ **et** $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ **.**
2) **En déduire les valeurs de a et b.**
3) **Dresser le tableau de variation de f.**

B) Dans cette partie on admet que : a=1 et b=1.

Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$ **.**

1) **a)Montrer que g réalise une bijection de** $[0,+\infty[$ **sur un intervalle J que l'on déterminera.**

   b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} **à droite de 1.**

   Interpréter graphiquement le résultat.

   c) Construire la courbe (C') représentative de g^{-1} **dans le même repère** $(O,\vec{u},\vec{v})$ **.**

2) **Soit I=** $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$ **.**
   a) **Interpréter graphiquement I.**
   b) **Vérifier que :** $\forall x \in [0,1]$**, on a :** $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ **.**
   c) **Calculer, à l'aide d'une intégration par parties I.**
3) **Soit B l'aire de la partie du plan limitée par (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=1+ln(2).**
   a) **Calculer g(1) .**
   b) **Construire B sur le graphe ?**
   c) **Calculer B.**

BON TRAVAIL

Feuille à rendre avec la copie