Lycée rue Fattouma Bourguiba Monastir	**Devoir De Synthèse N° : 3**
Abbes A – Zemni F	Mathématiques 4 Sc-Exp
	Le 16 / 05 / 2011 Durée 3^H

❖ Exercice N°1 : (3 Points)

1) Les solutions dans Ê, de l'équation : $z^2 - (3 + i) z + 1 = 0$ sont :

a) Opposées b) conjuguées c) Inverses l'une de l'autre.

2) Un argument de $z = -4 e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est :

a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $-\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ l'ensemble des points M(z) tel que $|z - 1 - i| = |3 + 4i|$ est :

a) une droite b) un segment c) un cercle;

4) La forme exponentielle du nombre complexe $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}}$ est :

a) $\sqrt{2}\,(e^{i0} + e^{i\frac{\pi}{4}})$ b) $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ c) $\sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{2})}$

❖ Exercice N°2 : (5 points)

On considère dans l'espace ξ muni d'un repère orthonormé les points A(3,-3,0), B(-3,-3,8) , le plan P d'équation $x + 2y - 2z + 5 = 0$ et l'ensemble $S = \{M(x,y,z) \in E$ tel que $x^2+y^2+z^2+6y-8z=0\}$.

1) a) Montrer que S est une sphere de centre I(0,-3,4) et de rayon R = 5.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan P.

c) Déterminer les coordonnées du point H intersection de P avec D.

3) Montrer que P coupe S selon un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit le plan Q : $-3x + 4z + 9 = 0$. Montrer que Q est tangent à S en A.

5) a) Vérifier que [AB] est un diamètre de S.

b) En déduire une équation du plan Q' parallèle a Q et tangent à S.

6) Soit le point C(0,-6,0).

a) Montrer que le tétraèdre OABC est inscrit dans S.

b) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

❖ Exercice N°3 : (6 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x\,e^{-x}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (D) : $y = x$ est une asymptote à ζ_f.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats graphiquement.

2) a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de f ' et en déduire que $f'(x) > 0$.

c) Montrer que la courbe ζ_f admet un point d'inflexion que l'on déterminera.

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe ζ_f où la tangente (T) à ζ_f en A est parallèle à droite (D).

4) Tracer (D), (T) et ζ_f.

5) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe , l'asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

6) On désigne par g la fonction réciproque de f et par ζ_g sa courbe représentative dans le même repère. Tracer et déterminer les branches infinies de g.

B/ Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + x^n\,e^{-x}$ (n est un entier naturel non nul).

Soit la suite u définie par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(f_n(x) - x \right) dx$.

1) Déterminer la valeur de u_1.

2) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x^n\,e^{-x} \leq 1$ et en déduire que la suite u est bornée.

3) Démontrer que la suite u est décroissante. La suite u est-elle convergente ? Justifier.

❖ Exercice N°4 : (6 points)

Sur la figure dans l'annexe on a tracé la courbe ζ_f représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

* Les points E(1,0), A(-1,e) et B(-2,2) sont des points de ζ_f.

* La tangente à ζ_f en A est parallèle à l'axe des abscisses.

* La tangente à ζ_f en B passe par Le point C(-4,0).

* La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $-\infty$.

* admet une branche parabolique verticale au voisinage de $+\infty$.

1) a) Donner les valeurs de f(-2), f(-1) et f(1) ainsi que les limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Donner en justifiant vos réponses les nombres $f'(-1)$ et $f'(-2)$.

2) On pose pour tout x réel, $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$.

a) Déterminer $g'(x)$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(f''(x) \cdot f(x) + \left(f'(x)\right)^2\right) dx$.

3) Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty, -1]$.

a) Montrer que φ réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire la courbe $\zeta_{\varphi^{-1}}$ de φ^{-1} dans le même repère que ζ_f dans l'annexe.

4) Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln\left(f(x)\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition D de h.

b) Calculer les limites de h aux bornes de D.

c) En déduire les équations de chacune des asymptotes de ζ_h.

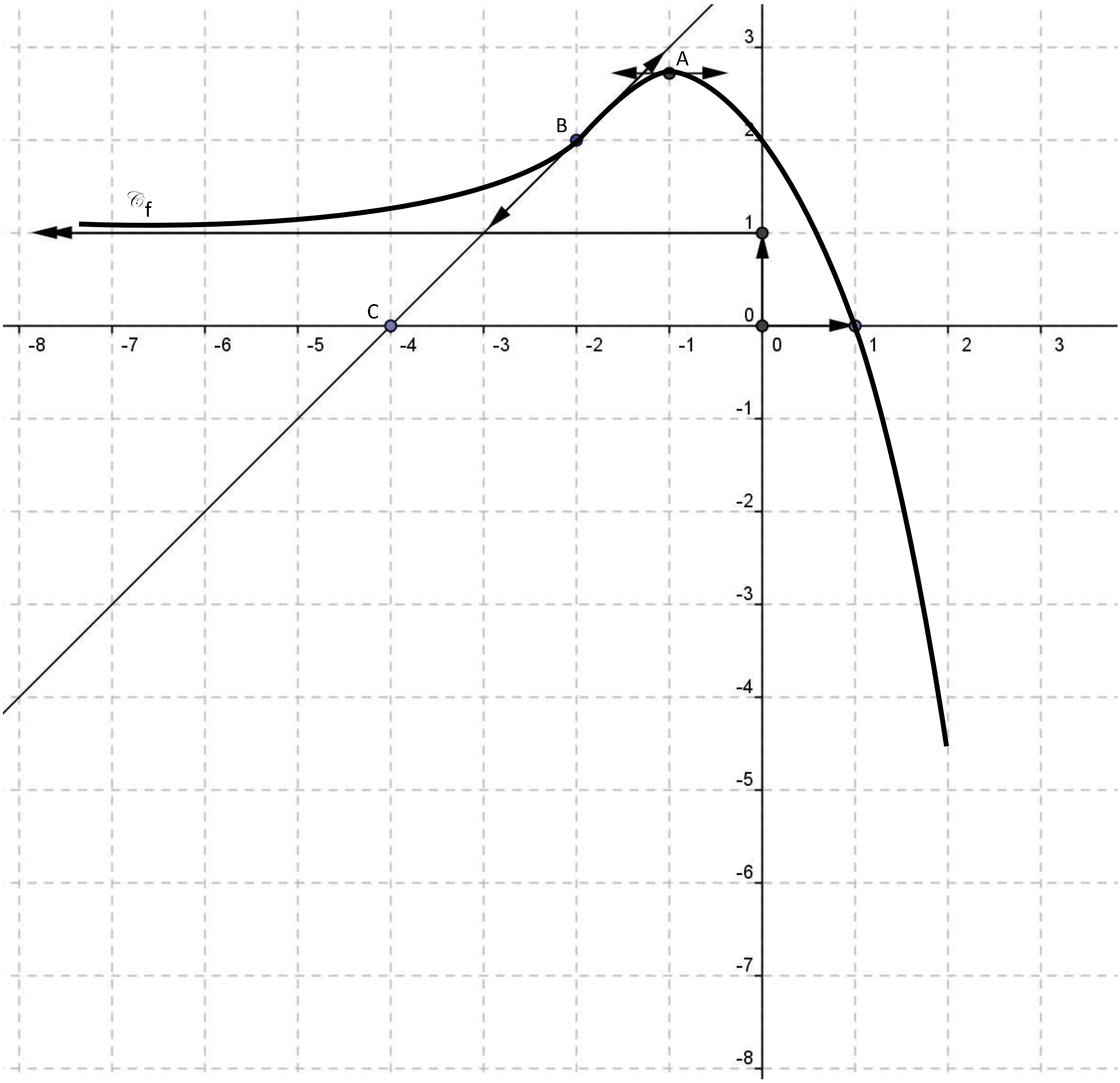
d) Calculer $h'(x)$ à l'aide de f(x) et $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de h.

e) Déterminer h(-2) et h'(-2) puis une équation de la tangente à ζ_h au point d'abscisse -2.

<u>*FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE*</u>

NOM : ………………………………………………

PRENOM : …………………………………….



(Figure de l'exercice 4)