Bac blanc **Epreuve : Mathématiques**

Section : SC – EXP **coef : 3**

l- ibn khaldoun **Oueslatia :** **Durée : 3h**

Mai 2011

Prof : Arfaoui - khaled

Exercice 1 : (3 points)

L'élève doit écrire sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la bonne réponse

1/ la limite de la fontion $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$ à gauche en 0 est :

a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$

2// la limite de la fontion $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x^2}$ à gauche en 0 est

a) 2 b) $+\infty$ c) $-\infty$

3/ la limite de la fontion $f(x) = x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ en $-\infty$ est

a) 0 b) 1 c) $+\infty$

4/ la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^{\ln x} t^2\,dt$ vérifie :

a) $F'(x) = (\ln x)^2$ b) $F'(x) = (\ln x)^2 - x^2$ c) $F'(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x^2}$

5/ la fonction $f(x) = \ln(\ln x)$ est définie sur $]0,+\infty[$

a) vrai b) faux

6/ la valeur moyenne sur $[-1,1]$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x\sqrt{x^2+1})}{e^{x^2}}$ est :

a) 0.5 b) 0 c) 1

<u>Exercice 2</u> (5.5 pts)

Soit f la fonction définie sur IR* par : $f(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$

1/ Montrer que f amet un prolongement par continuité à gauche en 0

2/ Etudier la limite de f à droite en 0 et en $+\infty$ et en $-\infty$. interprèter graphiquement ces résultats

3/ a) Montrer que pour tout x de IR* ona : $f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}\,(2x+1)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4/ Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5/ Pour tout entier naturel $n \geq 2$, On considère la suite $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}\, dx$

a) Calculer I_2

b) Montrer à l'aide d'une intégration par partie , que pour tout entier naturel $n \geq 2$

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)\, I_n$$

c) Calculer I_3

d) Montrer que pour tout x de $[1,2]$ on a : $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

e) En déduire un encadrement de I_n , puis Etudier sa limite eventuelle

<u>Exercice 3</u>(5.5 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

On désigne C sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1/ a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la droite D d'équation D : x = 1 est un axe de symétrie pour C

b) Préciser ler branches infinies de C et tracer C

2/ Soit F la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $F(x) = \int_1^{1+\tan x} \frac{dt}{t^2-2t+2}$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que F'(x) =1

b) En déduire que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}[$, F(x) = x

c) Calculer l'integrale $I = \int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+2}$

3/ a) Montrer que $\int_1^2 f(x)\,dx = 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{x^2-x}{x^2-2x+2}\,dx$

b) Vérifier que pour tout x de IR , $\frac{x^2-x}{x^2-2x+2} = 1 + \frac{x-1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-2x+2}$

c) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 4 (3pts)

Soit $f : IR_+ \to IR$ définie par $f(x) = \sqrt{4+3x}$

On considére la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1/ a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \leq U_n \leq 4$

b) Etudier la monotonie de U

c) En déduire que U est convergente et calculer sa limite

2/ a) Montrer que pour x de $[0,4]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b) Montrer que pour tout n , $|U_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|U_n - 4|$

c) En déduire que pour tout n de IN , $|U_n - 4| \leq 4(\frac{3}{4})^n$ et retrouver la limite de U

Exercice 5 (3pts) Dans l'espace munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit $S = \{M(x,y,z) \text{ de l'espace } / \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0\}$

On désigne par P le plan d'équation cartésienne P : y + z +1 =0

1/ Montrer que S est une sphère dont on précisera son centre I et le rayon R

2/ Etudier la position relative de S et P et déterminer $S \cap P$

3/- a) Vérifier que $A(2,1,0) \in S$

b) Déterminer une équation cartésiénne du pan Q tangent à S en A

4/ a) Vérifier que les plans P et Q sont perpendiculaires

b) Donner une représentation paramétrique de la droite $D = P \cap Q$