BAC BLANC _ MATHEMATIQUES

CLASSES : 4sc 1 &2 – DUREE : 3 HEURES – COEF : 3

Professeurs : Chrih + Htiouech

***Le sujet comporte 3pages numérotées* 1/3 à 3/3**

EXERCICE 1 (2 points)

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante. Aucune justification n'est demandée Pour chaque question une seule proposition est exacte, barème proposé 0,5 x4

1) $\lim\limits_{x \to 0^-} x e^{-\frac{1}{x}}$ est égale à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

2) Le complexe $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine

a) huitième de l'unité b) sixième de l'unité c) quatrième de l'unité

3) Soit z et m deux complexes on a : $\overline{iz + (1+i)m}$ est égal à :

a) $-iz + (1-i)m$ b) $-i\overline{z} + (1-i)\overline{m}$ c) $-i\overline{z} + (1-i)m$

4) $\int_{-1}^{1} x\ln(1+x^2)\,dx$ est égale à :

a) $e\ln(1+e^2)$ b) 0 c) 2e

EXERCICE 2 (4,5 points)

Soit p un entier naturel non nul, On pose $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}dx$

1) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}$

2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul p, on a : $\frac{2^{p+1}}{e^2(p+1)} \leq I_p \leq \frac{2^{p+1}}{(p+1)}$

b) En déduire la limite de la suite $(\frac{I_p}{2^{p+1}})$.

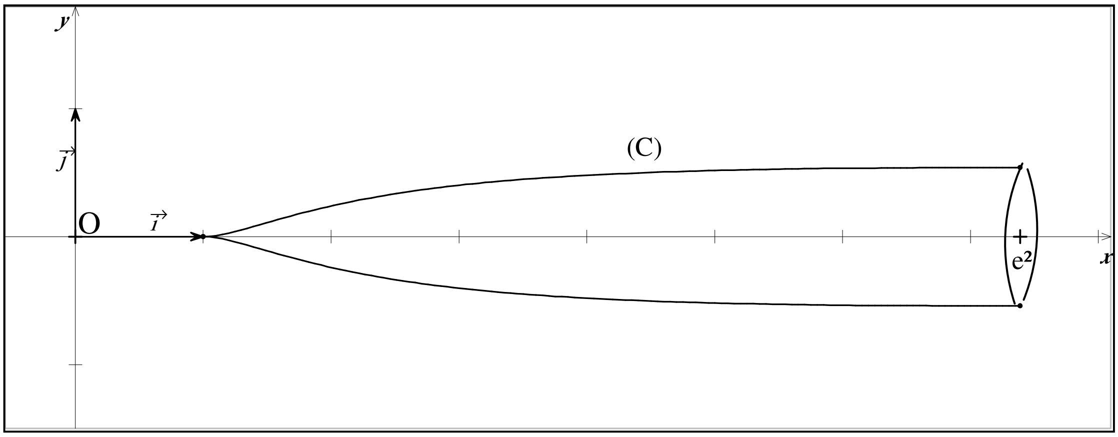
3) a) Montrer, en effectuant une intégration par parties, que $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$

b) En déduire successivement les valeurs de I_2, I_3 et I_4.

c) On a représenté ci-dessous l'arc (C) de la courbe de la fonction $f : x \to \frac{(\ln x)^2}{x}$ où $x \in [1, e^2]$

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

On fait tourner l'arc (C) autour de l'axe des abscisses .Calculer le volume du solide ainsi engendré.



EXERCICE 3 (4,5 points)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

1) Déterminer les coordonnées des points F, C et H.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH)

3) a) Calculer $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $-x + y + z = 0$

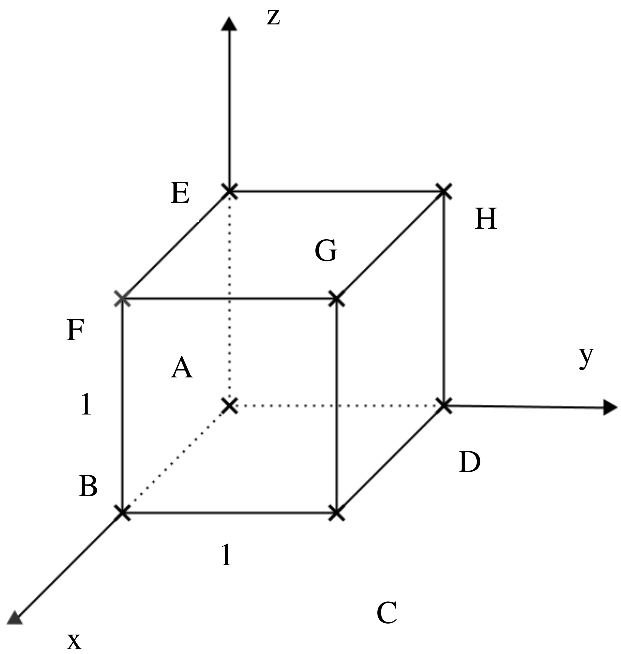
c) Déterminer les points M de la droite (BH) pour que le volume du tétraèdre ACFM soit égal à $\frac{11}{6}$

4) Soit m un réel et S_m l'ensemble des points M(x, y, z)

Tels que $x^2+y^2+z^2-2(1-m)x-2my-2mz+3m^2-2m+\frac{2}{3}=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) pour quelles valeurs de m S_m est tangente au plan (ACF) ? Préciser les coordonnées de point du contact.



EXERCICE 4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur [0,1[par $f(x) = \ln(1-x^2)$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

[unité graphique 2 cm]

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer $(\mathscr{C})$ dans le repère $\mathscr{R}$ (on précisera en particulier la demi-tangente au point O et l'asymptote)

2) a) Montrer que f réalise une bijection de [0,1[sur] $-\infty$,0]

b) Soit (Γ) la courbe représentative dans le repère $\mathscr{R}$ de la fonction réciproque f^{-1}.

Tracer (Γ) dans le repère $\mathscr{R}$ (on précisera en particulier la demi-tangente au point O et l'asymptote)

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

c) Montrer que pour $x \leqslant 0$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1-e^x}$

3) a) Soit $F(x) = (x-1)\ln(1-x) + (x+1)\ln(x+1) - 2x$ où $x \in [0,1[$.Montrer que F est une primitive de f.

b) Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm² de la partie limitée par $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y = -\ln 2$, $x = 0$ et $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Hachurer cette partie puis montrer que $\mathscr{A} = \left[8\ln(1+\sqrt{2}) - 4\sqrt{2}\right]$ cm²

c) Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1-e^x}\,dx$

EXERCICE 5 (4 points)

1) Trouver les solutions de l'équation : $2z^2 - 2(1-\cos\theta)z + 1 - \cos\theta = 0$; où $\theta \in]0, \pi[$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Soit les points M, N et P d'affixes respectives $z_1 = \dfrac{1}{2}(1 - \cos\theta + i\sin\theta)$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}(1 - \cos\theta - i\sin\theta)$ et $z_3 = 1 - \cos\theta$

a) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle

b) Placer dans le plan les points M, N et P pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

3) a) Calculer $\left| z_1 - \dfrac{1}{2} \right|$ et $\left| z_2 - \dfrac{1}{2} \right|$.En déduire que les points M et N appartiennent à un cercle que l'on précisera

b) Montrer que le quadrilatère ONPM est un losange. Déterminer θ pour que ONPM soit un carré.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux