Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** Mathématiques	Classe : 4 ème Sc exp1
Date : 16 / 05 / 2011	Prof : Meddeb Tarak	Durée : 3 heures

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte.

On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x - \ln\left(1+e^{x}\right)\right)$ est égale à :

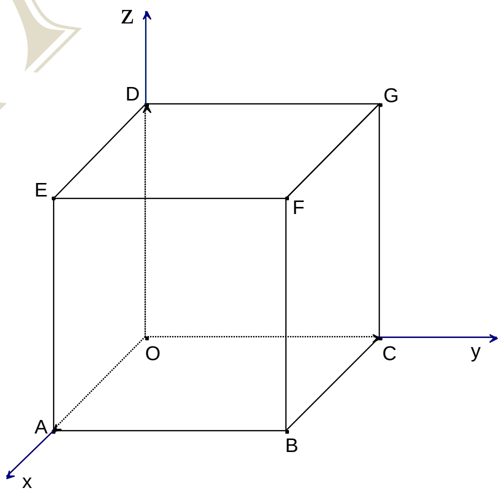
$a/\ 0$ $\qquad b/\ +\infty$ $\qquad c/\ -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$ est égale à :

$a/\ 0$ $\qquad b/\ +\infty$ $\qquad c/\ -\infty$

$OABCDEFG$ est un cube d'arrête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$



3) $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{CE}$ est égale à :

$a/\ 0$ $\qquad b/\ \sqrt{2}$ $\qquad c/\ \sqrt{3}$.

4) Une équation du plan (ADF) est :

$a/\ x + z - 1 = 0.$

$b/\ 2x - y - 2 = 0.$

$c/\ x - y + z - 1 = 0.$

Exercice n°2 : (5 pts)

1) $a/$ Montrer que, pour tout réel θ on a : $1+e^{i\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

$b/$ On considère le nombre complexe $z = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Vérifier que $z = 1+e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$c/$ Ecrire z sous la forme exponentielle.

$d/$ Montrer alors que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$.

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 3 + 2e^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0.$$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_1 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = 3 - e^{i\theta}$.

   $a/$ Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera.

   $b/$ calculer $|z_1 - 1|$, en déduire que M_1 appartient à un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

   $c/$ Construire les points M_1 et M_2 dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{6}$.

4) $a/$ Montrer que, pour tout $\theta \in [0, \pi]$ on a : $M_1M_2 = 4\sin\frac{\theta}{2}$.

   $b/$ Déterminer la valeur de θ pour que la distance M_1M_2 soit maximale.

Exercice n°3 : (5 pts)

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x}$.
   On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

   $a/$ Dresser le tableau de variations de f.

   $b/$ Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   $c/$ Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

2) On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n\, e^{-U_n}, \quad n \in \mathrm{IN} \end{cases}$

   $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $0 < U_n \leq 1$.

   $b/$ Montrer que la suite U est décroissante.

   $c/$ En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

3) Soit, pour tout $n \in IN$, $W_n = \ln U_n$.

   $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $W_n - W_{n+1} = U_n$.

   $b/$ On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$, $n \geq 1$.
   Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = -W_n$.

   $c/$ Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice n°4 : (7 pts)

A- Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1) $a/$ Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

   $b/$ Etudier les variations de φ sur IR.

2) $a/$ Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une dans l'intervalle $[1, +\infty[$, qui sera notée α.

   $b/$ Vérifier que : $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$.

3) Tracer la courbe Γ représentation graphique de φ dans un repère orthogonal.

B- Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les fonctions f et g sont définies sur IR par :

$$f(x)=(2x+1)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

1) Démontrer que les deux courbes passent par le point $A(0,1)$ et admettent en ce point la même tangente.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x \in IR$, $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$. où φ est la fonction étudiée dans la partie **A**.

$b/$ Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3) On considère les intégrales :

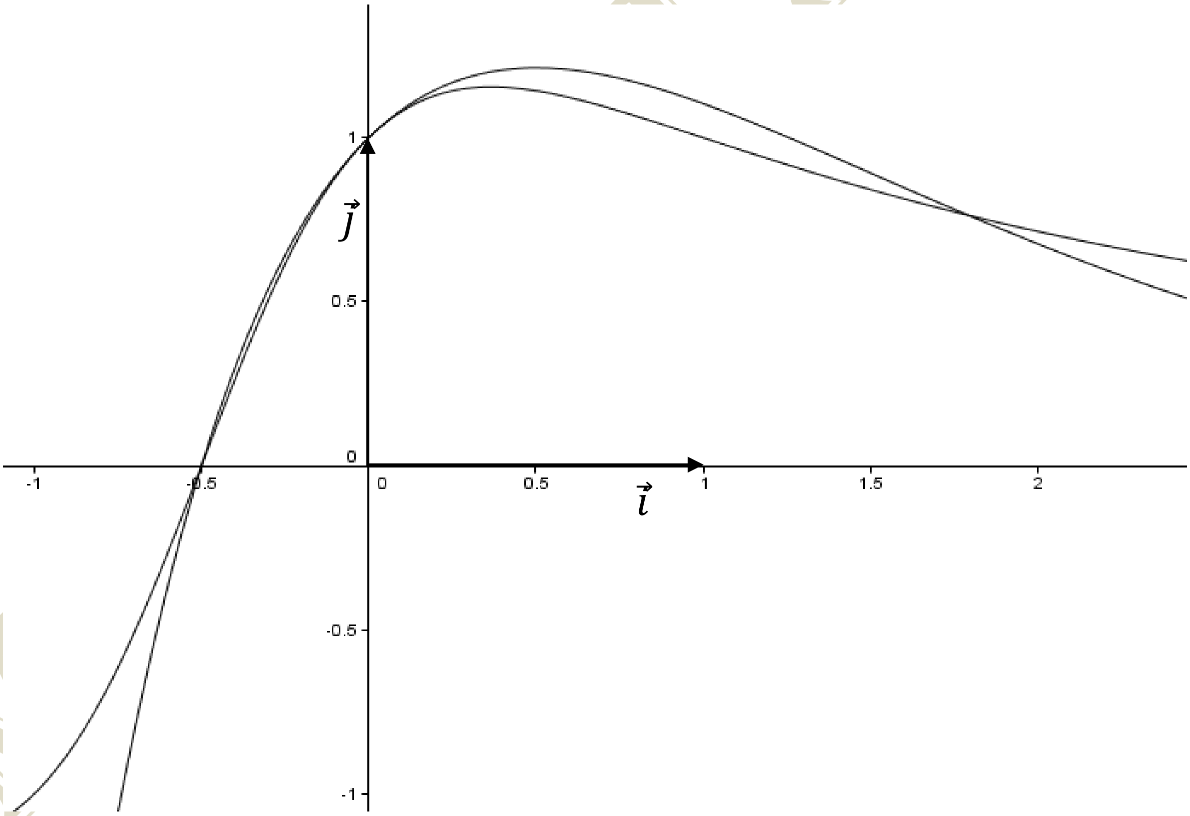
$$F=\int_0^{\alpha} f(x)dx \quad \text{et} \quad G=\int_0^{\alpha} g(x)dx$$ où α est le réel défini dans la partie **A**.

$a/$ Calculer G et montrer que $G=\alpha$.

$b/$ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F=(-2\alpha-3)e^{-\alpha}+3$.

$c/$ On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région du plan délimitée par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\alpha$.

Montrer que : $\mathcal{A}=\dfrac{-\alpha^2(\alpha-2)}{\alpha^2+\alpha+1}$.



Bonne chance