Lycée secondaire Otman-Chatti M'SAKEN	Devoir de synthèse n°2 Mathématique Duree 3 heures	$4^{\text{ième}}$ Sciences expérimentales Proposé par Mr: $\begin{cases} \text{Salah mohsen} \\ \text{Gmati saber} \end{cases}$

EXERCICE 1

Pour chacune des questions suivantes une ou plusieurs réponses proposées sont exactes

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie

Aucune justification n'est demandée

1. *Si S est la sphère de centre O et de rayon* $\sqrt{5}$ *alors:*

a)Le point A ($(\sqrt{2},\sqrt{3},0)$ *appartient à S*

b)Une équation cartésienne de S est : $x^2+y^2+z^2=2$

c) Le plan P : x + z + 3 = 0 est sécant avec S

d) Le plan Q : y = 5 est tangent à S

2. *Soit P le plan d'équation : 2x + 2y – z =0 et D la droite passant par A (1, 1,1) et de vecteur directeur* $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ *on a:*

a) *P et D sont sécants*
b) *P et D sont parallèles*
c) *D est orthogonal à P*
d) *La droite D est incluse dans P*

3. *La fonction :* $x \rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

a) *est définie sur :* $]-1,+\infty[$
b) *est strictement décroissante sur* $]0,+\infty[$
c) *a pour limite 0 en* $+\infty$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ *par :* $f(x)=\ln(2(1-x))-x$

1. a)*Vérifier que pour tout* $x<0$ *on a:* $f(x)=\ln(-x)+\ln\left(2-\frac{2}{x}\right)-x$

en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que l`équation f(x)=0 admet une unique solution* $\alpha$ *dans l`intervalle $]-\infty,1[$ *et vérifier que* $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$

2. *Soit* $h: x\rightarrow 1-\frac{1}{2}e^x$ *définie sur l`intervalle* $I=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

a) *Montrer que* $h(\alpha)=\alpha$
b) *Etudier les variations de h et en déduire que pour tout réel x de I on a:* $h(x)\in I$

c) Montrer que pour tout $x \in I$ on a: $|h'(x)| \leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

d) En déduire que pour tout $x \in I$ on a : $|h(x)-\alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)|x-\alpha|$

3. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) , \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a: $U_n \in I$

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)|U_n - \alpha|$

c) En déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$

d) Detrminer alors la limite de la suite

e) Préciser un entier p tel que : $|U_p - \alpha| \leq 10^{-2}$

EXERCICE 3

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par:

$$f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[.

b) Calculer f(1) et en déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle]0 ; +∞[.

c) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par

$F(x) = x \ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

d) Montrer que l équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution α dans

l intervalle $[1, +\infty[$. et vérifier que $1 < \alpha < 2$

2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé ,

les courbes C_g et C_h représentatives des fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $x \rightarrow 1 + \ln x$

a) Reconnaître chacune des fonction g et h

b) P est le point d'intersection de la courbe C_g et de l'axe des abscisses et A est le point d'intersection des courbes C_g et C_h . Déterminer les coordonnées chacun des points P et A

c) On note S l'aire du domaine délimité par les courbes C_g , C_h et les droites d équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$ .Montrer que $S = 1 - \frac{1}{e}$

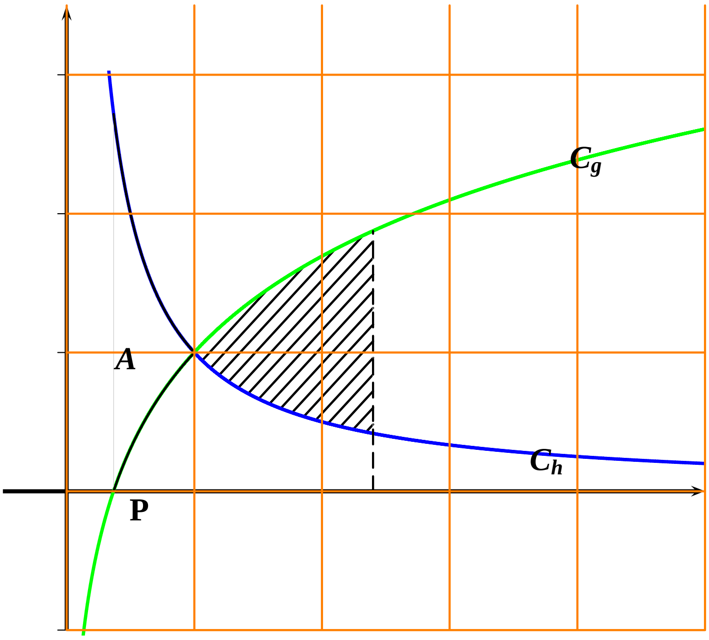
3. Soit t un nombre réel de l'intervalle]1 ; +∞[. On note B_t l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les

courbes C_g et C_h (domaine hachuré sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de t telle que: $S = B_t$.

a) Montrer que: $B_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

b) Conclure.



EXERCICE 4

le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, I et J d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = 3-i$, $z_I = 2$ et $z_J = -4$

A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 - 4z$ le point M\` est appelé image de M.

1. a)Résoudre l équation : $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$

b) En déduire les affixes des points A\` et B\` images respectives de A et B

2. a) Vérifier que pour tout nombre complexe z on a : $z' + 4 = (z-2)^2$

b) En déduire que: $JM' = IM^2$ et $Arg(z'+4) \equiv 2Arg(z-2)\ [2\pi]$

c) En déduire l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle de centre I et de rayon 2

3. Soit le point E d \`affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et soit E\` l\`image de E

a) Calculer la distance IE et une mesure de l\`angle $(\vec{u}, \overrightarrow{IE})$

b) En déduire la distance JE\` et une mesure de l\`angle $(\vec{u}, \overrightarrow{JE`})$

c) Construire les points I ,J ,E et E\`