Lycée Ghannouch	**Devoir de Synthèse n°3**	Profs : **Taïeb ,Sadok&Jamel** Durée : **3h**
Le 16/05/2011	(Mathématiques)	**Classes :** 4$^{\text{éme}}$ **Tech$_{1+2}$& Sexp**

Exercice n°1 :(5points)

1) a) Ecrire (3 - i) ² sous la forme algébrique.

b) Résoudre dans C l'équation : z² - (7 + 7i) z - 2 + 26i = 0

2) Soit f (z) = z^3 - (6 + 7i) z² + (-9 +19i) z - 2 + 26i

a) Vérifier que f (-1) = 0

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que f (z) = (z +1) (z² + bz + c)

c) Résoudre alors l'équation f (z) = 0

3) Soient dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

Les points A (-1), B (3i), C (2 + 4i) et D (5 + 3i).

Montrer que AB = CD et (BC) // (AD)

Exercice n°2 :(5points)

On considère la fonction f définie sur IR par f(x) = $x+1-e^{-x}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la droite D : y = x +1 est une asymptote de (C_f) au V($+\infty$)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

d) Construire (C_f) dans un repère orthonormé R = $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Unité graphique : 2cm)

2) a) Calculer en cm² l'aire A_n de la région du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites :

D : y = x+1 , Δ : x = 0 et Δ' : x = n. (n $\geq$ 1)

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b) En déduire que l'équation f(x) = 1 admet une unique solution α

c) Tracer la courbe (C') de g $^{-1}$ dans le même repère.

d) Calculer $\int_0^{\alpha} f(x)dx$ en déduire $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$

Exercice n°3: (6points)

Pour tout n$\in$ IN, on pose $I_n = \int_0^1 t^n\, e^{-t}\, dt$

1) a) Calculer I_0

b) A l'aide d'une intégration par partie Calculer I_1

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante

3) a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ on a : $0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

4) pour tout x de IR on pose, $g(x) = x\, e^{-x}$. Montrer que g est décroissante sur $[1, +\infty[$

b) Pour tout réel x on pose $G(x) = \int_0^x t\, e^{-t}\, dt$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall x \in IR,\ G(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$.

5) Pour tout $n \in IN^*$ on pose $U_n = \int_n^{n+1} g(t)\, dt$ et $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

a) Montrer pour $t \in [n, n+1]$ $g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$

En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $g(n+1) \leq U_n \leq g(n)$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $S_n = G(n+1) - G(1)$

d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

<u>Exercice n° 4 :</u>(4points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe φ ci -dessous **(page 3)** représente la fonction f définie sur IR par $f(x) = (ax+b)e^{cx}$ où a , b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer

On sait que la courbe φ contient les points des coordonnées (1,0) et $(0, \frac{1}{3})$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{2}{3}$

1)Par lecture graphique.

a)Dresser le tableau de variation de f

b) Donner f (0), f (1) et $f'(\frac{2}{3})$

2) Exprimer f ' (x) en fonction de a, b et c

3) En déduire que $f(x) = \frac{1}{3}(1-x)e^{3x}$

4) Soit g la restriction de f sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[\frac{2}{3}; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser

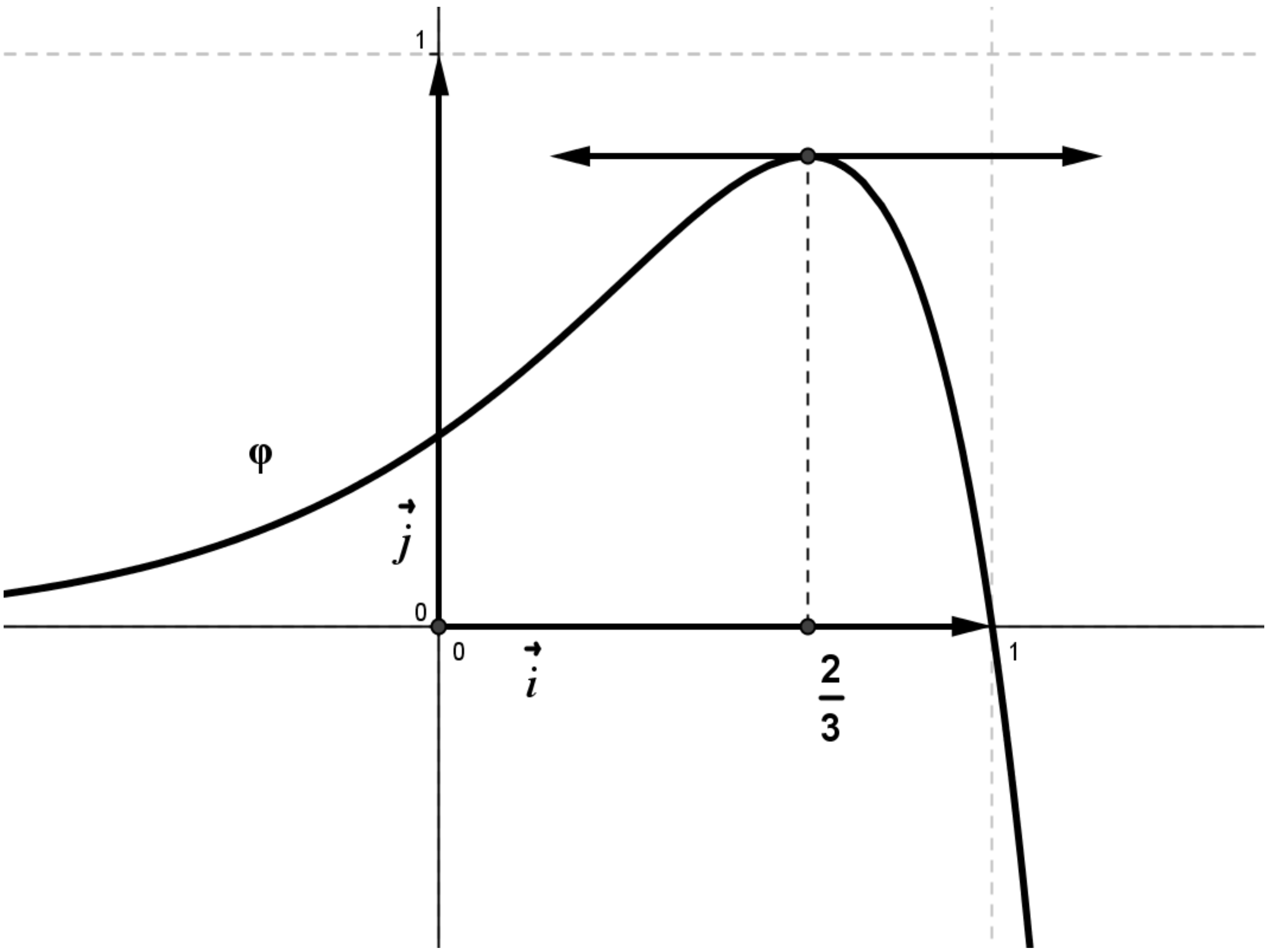
b) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère

5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par φ et les droites d'équations $x = \frac{2}{3}$; x = 1 et y = 0

Bon Travail

Feille à Rendre avec la copie

Nom & Prénom : ……………………………………………………………………………………………….



Correction de devoir de synthèse n°3 : **Classe : 4éme Tech +Sexp**

Exercice n°1 :

1-a) $(3-i)^2 = 8-6i$

b) (E) : $z^2 - (7+7i)z - 2 + 26i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8-6i = (3-i)^2$

$\partial = 3-i$ ou $\partial = -3+i$ $S_C = \{5+3i \,;\, 2+4i\}$

$z' = \frac{-b+\partial}{2a} = \frac{7+7i+3-i}{2} = 5+3i$ et $z'' = \frac{-b-\partial}{2a} = \frac{7+7i-3+i}{2} = 2+4i$

2- $f(z) = z^3 - (6+7i)z^2 + (-9+19i)z - 2 + 26i$

a) $f(-1) = -1+6+7i+9-19i-2+26i = 0$

b) $f(z) = (z+1)(z^2+bz+c) = z^3 + (b+1)z^2 + (b+c)z + c \Rightarrow \begin{cases} b+1 = -6-7i \\ b+c = -9+19i \\ c = -2+26i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -7-7i \\ c = -2+26i \end{cases}$

3- $f(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-(7+7i)z-2+26i) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z^2-(7+7i)z-2+26i=0$

z=-1 ou z = 5+3i ou z = 4+2i $\Rightarrow S_C = \{-1, 5+3i, 4+2i\}$

$AB = |z_B - z_A| = |3i+1| = \sqrt{10}$

$CD = |z_D - z_C| = |5+3i-2-4i| = |3-i| = \sqrt{10}$

$\Rightarrow$ AB = CD

$\frac{aff(\overrightarrow{BC})}{aff(\overrightarrow{AD})} = \frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = \frac{2+4i-3i}{5+3i+1} = \frac{2+i}{6+3i} = \frac{1}{3} \in IR \Rightarrow (BC) // (AD)$

Exercice n°2 :

1- a)

$f(x) = x+1-e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1+e^{-x} \succ 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+1-e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x+1-\frac{1}{e^x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+1-e^{-x} = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = \lim_{x\to+\infty} -e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^x} = +\infty \Rightarrow$ **C_f admet une branche parabolique de direction** $(o\vec{j})$

2-a) $A_n = \int_0^n |f(x)-(x+1)|dx \times (4cm^2) = 4\int_0^n e^{-x}dx = 4\left[-e^{-x}\right]_0^n = 4(1-e^{-n})cm^2$

b) $\lim_{x\to+\infty} A_n = \lim_{x\to+\infty} 4(1-e^{-n}) = 4$

3) a)f continue **strictement** croissante sur IR donc elle réalise une bijection de IR sur f(IR) = IR

b) On a f une bijection de IR sur IR ; or 1∈ IR alors il existe une unique ∝ ∈ IR tel que f(∝) = 1

c) $C_{f^{-1}} = S_\Delta(C_f)$ avec $\Delta : y = x$ **(voir courbe)**

c) $\int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha x+1-e^{-x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x+e^{-x}\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2+\alpha+e^{-\alpha}-1$

$\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_0^\alpha f(x)dx$

Exercice n°3 :

1-a) $I_0 = \int_0^1 e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$

b)
$$I_1 = \int_0^1 te^{-t}dt \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$
$$I_1 = \left[-te^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-t}dt = -e^{-1} - \left[e^{-t}\right]_0^1 = 1 - 2e^{-1}$$

2- $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1}e^{-t}dt - \int_0^1 t^n e^{-t}dt = \int_0^1 t^n e^{-t}(t-1)dt \le 0$ car $t \in [0,1] \Rightarrow$ (I_n) est décroissante

3-a) on a : $0 \le t \le 1 \Rightarrow -1 \le -t \le 0 \Rightarrow 0 \le e^{-1} \le e^{-t} \le 1 \Rightarrow 0 \le t^n e^{-t} \le t^n$

on a : $0 \le t^n e^{-t} \le t^n$ et les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t}$ et $t \mapsto t^n$ sont continus sur $[0,1]$

b) $0 \le \int_0^1 t^n e^{-t}dt \le \int_0^1 t^n dt \Rightarrow \quad 0 \le I_n \le \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \quad 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

c) on a: $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} I_n = 0$

4- a) $g(x) = xe^{-x} \Rightarrow$ $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \le 0 \quad \forall\ x \in [1,+\infty[\ \Rightarrow$ g est décroissante sur $[1,+\infty[$

b)
$$G(x) = \int_0^x te^{-t}dt \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$
$$G(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t}dt = -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to\infty} - xe^{-x} - e^{-x} + 1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{\frac{e^x}{x}} - \frac{1}{e^x} + 1 = 1$

on a : $n \le t \le n+1$ et g est décroissante $\Rightarrow$ $g(n+1) \le g(t) \le g(n)$

5-a) $\int_n^{n+1} g(n+1) \le \int_n^{n+1} g(t)dt \le \int_n^{n+1} g(n)dt \Rightarrow g(n+1) \le U_n \le g(n)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = ?$ on a : $g(n+1) \le U_n \le g(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

c)
$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \int_1^2 g(t)dt + \int g(t)dt + \ldots\ldots\ldots + \int_n^{n+1} g(t)dt = \int_1^{n+1} g(t)dt = \int_1^0 g(t)dt + \int_0^{n+1} g(t)dt$$
$$= \int_0^{n+1} g(t)dt - \int_0^1 g(t)dt = G(n+1) - G(1)$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = \lim\limits_{x\to+\infty} G(n+1) - G(1) = 1 - G(1)$

<u>Exercice n°4 :</u>

1-

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f '(x)	+		-
f(x)	0 ↗		↘ $-\infty$

a) $f(0) = \frac{1}{3}$; $f(1) = 0$ et $f'(\frac{2}{3}) = 0$

2- $f'(x) = ae^{cx} + c(ax+b)e^{cx}$

3- $f(0)=\frac{1}{3} \Rightarrow$ b = $\frac{1}{3}$ et f (1) = 0 $\Rightarrow$ a+ b = 0 $\Rightarrow$ a = $\frac{-1}{3}$

$f'(\frac{2}{3})=0 \Rightarrow$ (a +c($\frac{2}{3}a+b$))$e^{\frac{2}{3}c}$ $=0 \Rightarrow \frac{-1}{3}+\frac{1}{9}c=0 \Rightarrow$ c = 3 $\Rightarrow$ f(x)=$\frac{1}{3}(1-x)e^{3x}$

4- a) g continue et strictement décroissante sur $[\frac{2}{3};+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[\frac{2}{3};+\infty[$ sur

g ($[\frac{2}{3};+\infty[$) =]-∞ ; $\frac{e^2}{9}$]

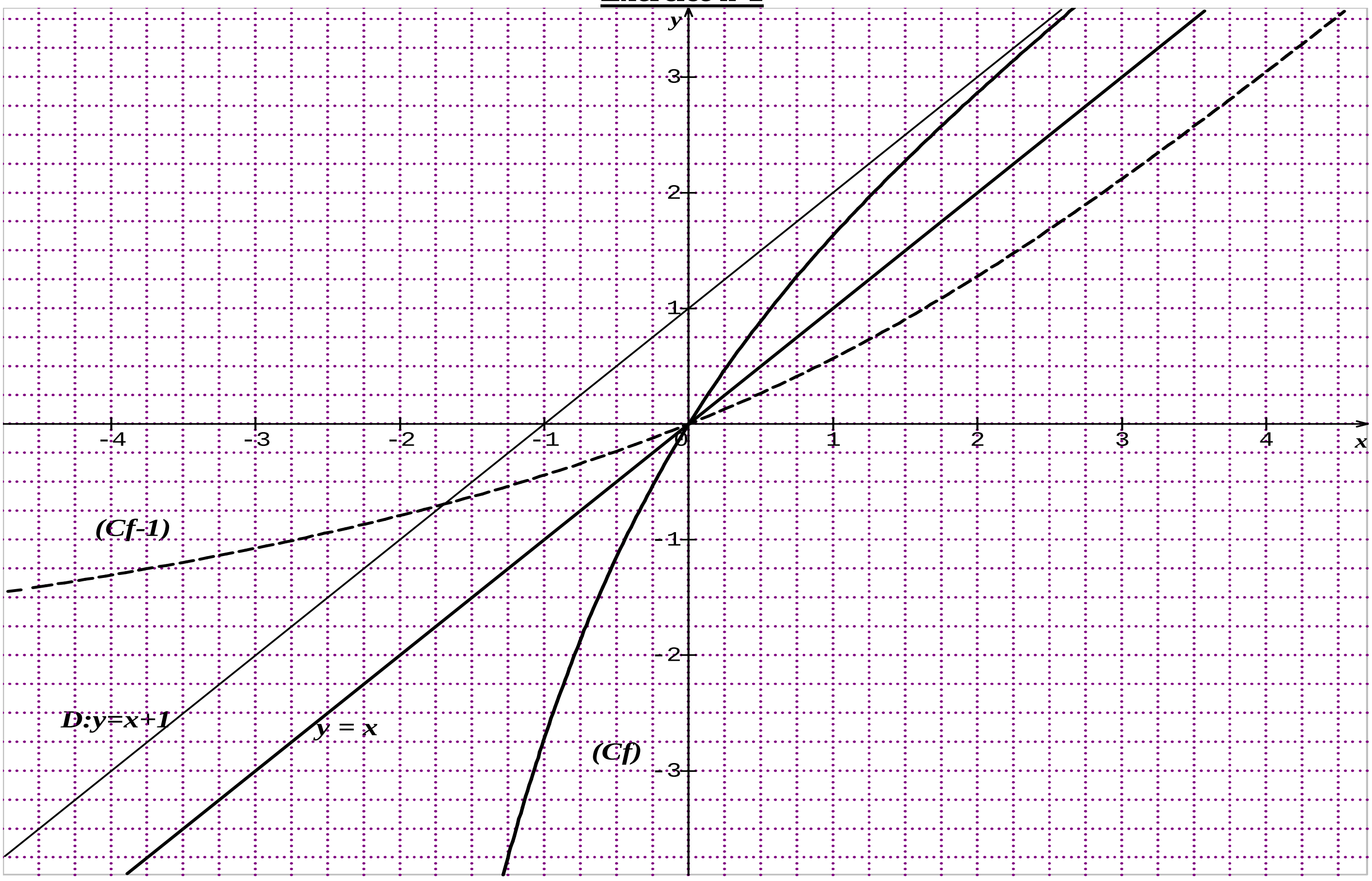
b) Voir courbe

5- $A=\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx=\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{1}{3}(1-x)e^{3x}dx \Rightarrow \begin{cases} u(x)=\frac{1}{3}(1-x) \\ v'(x)=e^{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{-1}{3} \\ v(x)=\frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$

$A=\left[\frac{1}{9}(1-x)e^{3x}\right]_{\frac{2}{3}}^{1}+\frac{1}{9}\int_{\frac{2}{3}}^{1}e^{3x}dx=-\frac{1}{27}e^2+\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{\frac{2}{3}}^{1}=-\frac{1}{27}e^2+\frac{1}{27}e^3-\frac{1}{27}e^2=\frac{1}{27}e^3-\frac{2}{27}e^2$

Au revoir à l'université

Exercice n°2



Exercice n°4