LS secondaire EL Alia	Devoir de synthèse n°3	AS : 2010/2011
Prof: Tlich Ahmed	(Bac Science 2)	Durée: 3h

Note : la propreté de la copie est prise en considération

Exercice n°1 : (3 points)
Choisir l'unique bonne réponse et sans justification.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - xe^{2x}$ égal à : a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$.

2) $\int_0^1 e^{-2x}dx$ égal à : a) $e^{-2}-1$ b) $\frac{1}{2}(e^{-2}-1)$ c) $\frac{1}{2}(1-e^{-2})$

3) Soit la fonction G définie et dérivable sur IR par $G(x)=\int_0^{e^x-1}\ln(t+1)dt$ alors G'(x) égal :

a) $\ln(x+1)$ b) $x\,e^x$ c) $(e^x-1)\ln(x+1)$

Exercice n°2 : (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On donne les points A(1,1,1) ,B(1,2,0) et C(4,2,-3).

1)a) Calculer : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que A,B et C ne sont pas alignés et donner une équation du plan P passant par A,B et C.

2) Soit S l'ensemble des points de l'espace d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 -2x + 4y + 6z -11 = 0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre I (1,-2,-3) et dont on déterminera son rayon.

b) Montrer que S et P sont sécantes en un cercle (C) passant par A, B et C.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan P.

b) Détermine une équation cartésienne du plan médiateur Q du segment [AB].

c) Déterminer le centre de la sphère circonscrit au tétraèdre ABCI.

(Le centre de la sphère circonscrit à un tétraèdre est l'intersection de l'axe du cercle circonscrit à la base et le plan médiateur d'une arrête latérale)

Exercice n°3 : (5 points)

Dans L'annexe n°1 ; on a deux courbes (C_1) et (C_2) une représente la fonction f définie sur IR par $f(x) =(x^2+1)e^{-x}$ et l'autre représente la fonction f ' fonction dérivée de f.

1) En justifiant votre réponse ; indiquer la courbe de chacune des fonctions f et f '.

2)a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$ puis dresser le tableau de variation de f.

3) Soit α un réel de $[0,+\infty[$.

a) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f ' ,l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x = \alpha$.

b) Par une double intégration par partie, Montrer que : $\int_0^{\alpha} f(x)dx = -(\alpha^2 +2\alpha+3)e^{-\alpha} +3$.

c) Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_1) , (C_2) et les droites d'équations x = 0 et x= α.

Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α puis calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

<u>Exercice n°4 : (5 points)</u>

On donne dans l'annexe n°2 les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$u(x) = 2\ln x-(\ln x)^2$ et $v(x) = x^2 -1$.

1)a) Indiquer la courbe de chaque fonction en justifiant votre réponse.

b) Déterminer graphiquement le signe de $(u(x) - v(x))$.

2) soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2-x^2-1}{x}$.

a) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{u(x)-v(x)}{x^2}$ puis dresser son tableau de variation.

c) Montrer que la courbe de f admet une tangente horizontale au point A d'abscisse 1.

d) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α et que $0,3 < \alpha < 0,4$.

e) Construire la courbe de f et la tangente en A.

3)a) Montrer que f est bijective de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Construire dans la même repère la courbe de f^{-1} .

4)a) Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f^{-1}, l'axe des ordonnés ; et les droites d'équations y = 1 et y =e.

<u>Exercice n°5 :</u> (3 points)

Soit la suite définie sur IN par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1) calculer I_0.

2) a) Montrer que (I_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout n Є IN : $I_n \geq 0$ et en déduire que (I_n) est convergente.

3) a)Montrer que pour tout x Є [0,1] et n Є IN on a : $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$.

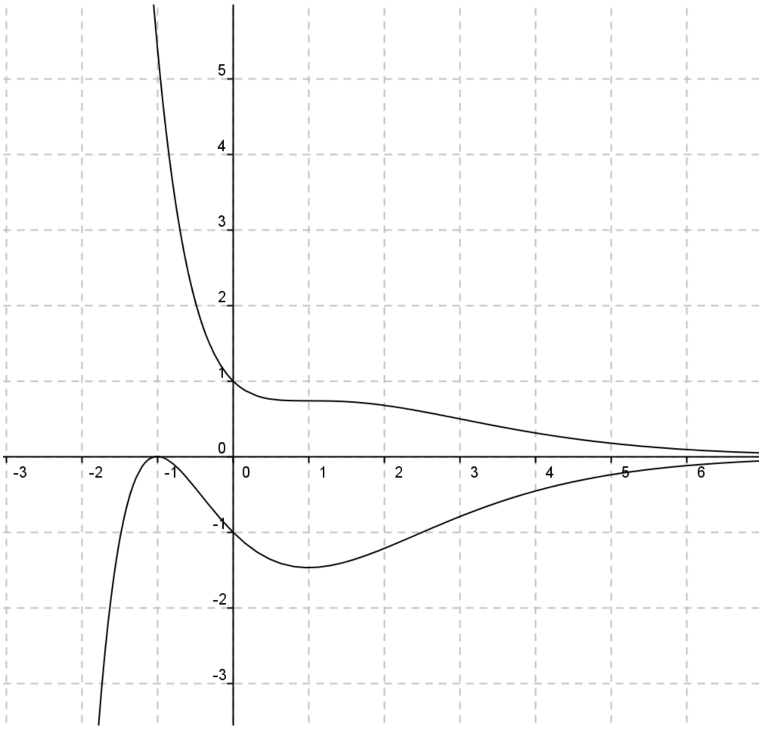
b) En déduire que : $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) a) Par une intégration par partie : montrer que pour tout n Є IN on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.

b) En déduire la valeur de I_1.

<u>Bon travail</u>

Annexe n°1(Exercice n°3)



Annexe n°2 (Exercice n°4)