DEVOIR DE SYNTHESE N°02

EPREUVE : MATHEMATIQUE

SECTION : SCIENCES NATURELES

PROF : ZAIED FAHEM **DUREE :** 3h 16/05/2011

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

Exercice N°01

Dans l'espace ξ *rapporté à un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On considère les points $A(1,0,4)$; $B(3,-1,1)$ *et* $E(1,2,0)$

1) a) *Donner une representation paramétrique de la droite* Δ *passant par* E *et de vecteur directeur* $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

b) *Ecrire une équation cartésienne du plan* P *médiateur du segment* $[AB]$

c) *Montrer que* Δ *coupe le plan* P *en un point* C *dont on precisera les coordonnées*

2) *Soit* $S_1=\left\{M(x,y,z)\in\xi \ / \ x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z+3=0\right\}$

Montrer que S_1 *est une sphère de centre* C *et de rayon* $\sqrt{6}$

3) *Soit* S_2 *la sphère de centre* $\Omega\left(1,2,\dfrac{5}{2}\right)$ *et passant par* O

a) *Donner une équation cartésienne de* S_2

b) *Montrer que :* $M(x,y,z)\in S_1\cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z+3=0 \\ 2x-2y-z-3=0 \end{cases}$

c) *En déduire que* $S_1\cap S_2$ *est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.*

Exercice N°02

Soit la fonction f dèfinie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$

ζ désigne sa courbe representative dans un repère orthonormè $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan

1)a) Montrer que pour tout rèel x, $f'(x)=\dfrac{-(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^{2}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Ecrire l'équation de la tangente T à ζ au point d'abscisse 0

d) Tracer T et ζ

2)a) Montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} définie sur $]0;+\infty[$

b) Tracer la courbe ζ' de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

3) Soit α un réel strictement positif et $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$

a) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=e^{-x}-1+\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

b) Exprimer $A(\alpha)$ en fonction de α puis calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

Exercice N°03

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_1^e (\ln x)^n\,dx$

1) En intégrant par parties, calculer I_1

2)a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. $I_n\geq 0$

b) Montrer que la suite I_n est décroissante. En déduire qu'elle est convergente

3)a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

b) En déduire I_2 ; I_3 et I_4

4)a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n\leq\dfrac{e}{n+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice N°04

On désigne par f *une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et par* f' *sa fonction dérivée*

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- *Pour tout nombre réel* x, $\left[f'(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2=1$
- $f'(0)=1$
- *La fonction* f' *est dérivable sur* $\mathbb{R}$

1) a) *Montrer que, pour tout réel* x, $f'(x)\neq 0$

b) *Calculer* $f(0)$

2) *Montrer que, pour tout réel* x, $f''(x)=f(x)$

3) *On pose, pour tout réel* x : $u(x)=f'(x)+f(x)$ *et* $v(x)=f'(x)-f(x)$

a) *Calculer* $u(0)$ *et* $v(0)$

b) *Montrer que, pour tout réel* x : $u'(x)=u(x)$ *et* $v'(x)=-v(x)$

c) *En déduire que, pour tout réel* x : $u(x)=e^{x}$ *et* $v(x)=e^{-x}$

d) *Déterminer, alors* f