| REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTÈRE DE L'EDUCATION ◈◈◈ LYCÉE : BECHRI | EXAMEN DU BACCALAUREAT BLANC SESSION MAI 2014 ◈◈◈ | | |
|---|---|---|---|
| | EPREUVE : MATHÉMATIQUES | DURÉE : 3H | COEFFICIENT : 3 |
| SECTION : SCIENCES EXPÉRIMENTALES | | PROFS : LAHMADI+KHYARI | |

## EXERCICE N°1 ( 3 points )

**A/** Choisir la bonne réponse. **Aucune justification n'est demandée.**

*On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité* **p** *de durée de vie sans vieillissement ( loi exponentielle) de paramètre $\lambda$ , définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ .*

❶ *La valeur de t pour laquelle on a $p([0,t[)=p([t,+\infty[)$ est :*

a) $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ b) $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ c) $\dfrac{\lambda}{2}$

❷ *Sachant que cet appareil n'a pas connu de panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :*

a) $p([1,+\infty[)$ b) $p([3,+\infty[)$ c) $p([2,3[)$

❸ *Soit $\lambda=0.2$ .Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par* **X** *la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années. La valeur la plus proche de $p(X=4)$ est :*

a) 0.5555 b) 0.8022 c) 0.1607

**B/** Répondre par **Vrai** ou **faux**. **Aucune justification n'est demandée.**

❶ *Une suite croissante a toujours une limite*

❷ *Toute suite décroissante est majorée*

❸ *Si une suite $(U_n)$ est convergente ,alors la suite $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ est aussi convergente.*

## EXERCICE N°2 ( 4 points )

*Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$ .*

*On désigne par A, B et J les points d'affixes respectives : $-i$ , $1-i$ et $i$.*

*On désigne par $\Delta$ la médiatrice du segment $[AB]$ et par $(\Omega)$ le cercle de centre O et de rayon 1.*

*A tout point* ***M*** *d'affixe* ***z*** *distincte de $1-i$, on associe le point* ***M'*** *d'affixe* ***z'*** *telle que*

$z'=\dfrac{i(z+i)}{z-1+i}$. *Le point* ***M'*** *est appelé image du point* ***M.***

❶ *Calculer les affixes des points* ***A'*** *et* ***O'***.

❷ *Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.*

❸ *Montrer que l'équation $z=\dfrac{i(z+i)}{z-1+i}$ admet deux solutions que l'on précisera.*

*On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions.*

*Justifier que les points E et F appartiennent au cercle $(\Omega)$ et les placer sur la figure.*

❹ *Soit **M** un point distinct du point **B** et M' son image.*

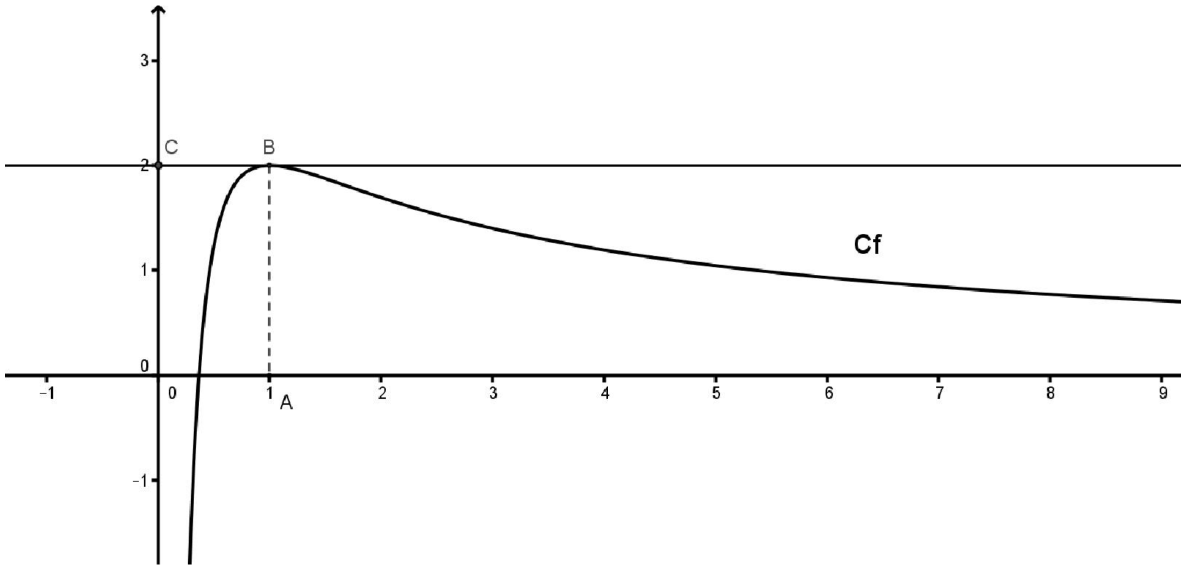
a) *Exprimer la distance **OM'** en fonction des distances **AM** et **BM.***

b) *Montrer que si le point **M** décrit la droite $\Delta$ , alors le point **M'** décrit un cercle que l'on précisera.*

❺ *Montrer que si le point **M** décrit la droite **(AB)** privée du point B, alors le point **M'** appartient à une droite que l'on précisera.*

## EXERCICE N°3 ( 5 points )

*Sur le graphique ci-dessous , on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ,la courbe représentative Cf d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ .*




*On dispose des informations suivantes :*

- *Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1,0)$ , $(1,2)$ et $(0,2)$*
- *La courbe Cf passe par le point B et la droite (BC) est tangente à Cf au point B.*
- *Il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x ,*

$$f(x)=\frac{a+b\ln x}{x}$$

❶ a) *En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$ .*

b) *Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$*

c) *En déduire les réels a et b.*

❷ a) *Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ , $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$ .*

b) *Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$*

c) *En déduire le tableau de variation de la fonction f.*

❸ a) *Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $]0,1]$ .*

b) *Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel $\beta$ de l'intervalle $]1,+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$ .*

.

❹ *Le but de cette question est de démontrer que la courbe Cf partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales*

a) *Justifier que cela revient à démontrer que* $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx = 1$

b) *En remarquant que f(x) peut s'écrire sous la forme* $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, *terminer la démonstration.*

## EXERCICE N°4 ( 4 points )

❶ *Une population de poisson d'une certaine espèce croît au cours des années selon la loi :*

$g' = \frac{g}{5}$ **(1)** , *où g désigne la quantité de poissons* **( en milliers )** *dépendant du temps t* **( en années ).**

a) *Résolvez l'équation différentielle* **(1)**.

b) *Sachant qu'à la date* **t =0** *la population comprend* **un millier** *de poissons, trouvez l'expression de g(t).*

c) *Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle pôur la première fois 4 milliers de poissons ?*

❷ *En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons ( dépendant de l'effectif total).*

*La population suit la loi :* $g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$ **(2).**

a) *On pose* $h = \frac{g}{3-g}$ *et on suppose que pour tout* $t$ *on a* $g(t) \neq 3$ .

*Montrer que g est solution de* **(2)** *si et seulement si h est solution de* **(1).**

b) *Trouvez les fonctions h solutions de* **(1)**, *puis les fonctions g solutions de* **(2).**

c) *Trouvez la fonction g solution de* **(2)** *telle que* $g(0) = 1$ .

d) *Vers quelle limite tend la population de poisson ?*

## EXERCICE N°5 ( 4 points )

*Dans l'espace* $\xi$ *rapporté à un repère orthonormé* $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ , *on donne les points* $A(2,1,1)$ *et* $I(3,-1,0)$ . $P_1 = \left\{M \in \xi \text{ tel que } MA^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0\right\}$ ..

❶ a) *Vérifier que* $A \in P_1$

b) *Montrer que* $P_1$ *est un plan dont une équation cartésienne est* $x - 2y - z + 1 = 0$

❷ *Soit S la sphère de centre I et passant par A.*

*Vérifier que le rayon de la sphère S est* $R = \sqrt{6}$ *puis déterminer une équation cartésienne de S.*

❸ *Soit P le plan dont une équation cartésienne est :* $2x - y + z - 4 = 0$

a) *Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle (C) dont on précisera les Coordonnées de son centre H et son rayon r.*

b) *Soit le point* $B(2,-2,-2)$ . *Vérifier que* $[AB]$ *est un diamètre de (C).*

c) *Déterminer une équation cartésienne du plan* $P_2$ *tangent à S en B.*

*Bon Travail*