

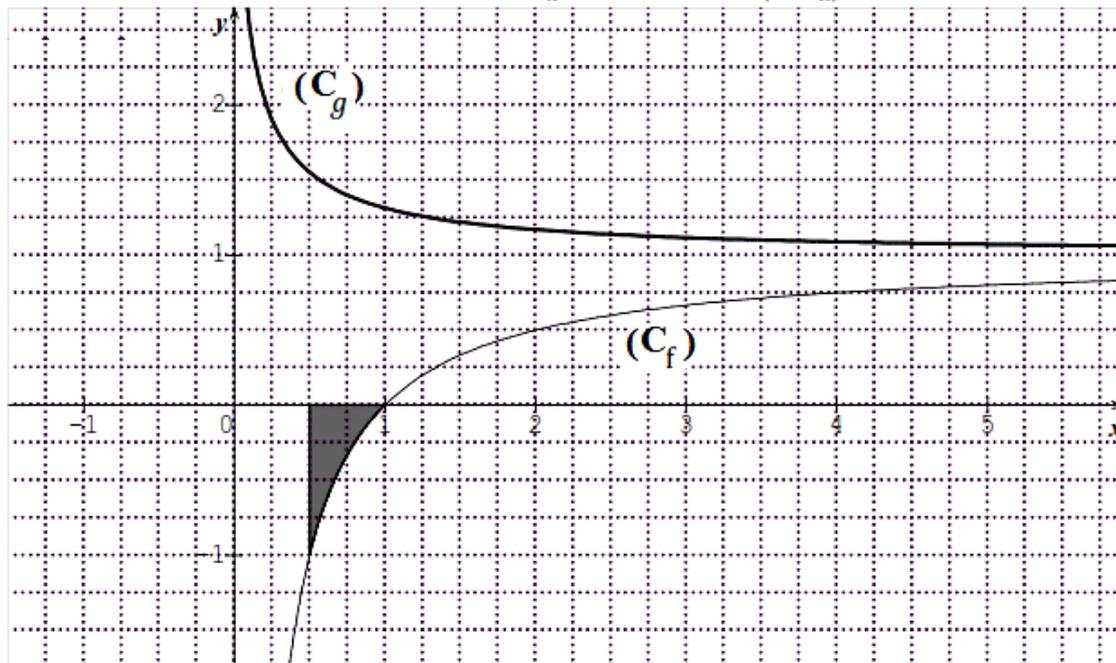
DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3
MATHÉMATIQUES

Prof : Med Khairedine

Bac sciences

Exercice 1 :

On donne dans la figure suivante les courbes représentatives, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , des deux fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$



Pour chacune des propositions suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

- 1 L'aire de la partie hachurée est $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$.
- 2 il existe un réel $c \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $g'(c) = 2 \ln\left(\frac{e+1}{e+2}\right)$
- 3 Les deux suites (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N}^* par : $U_n = f(n)$ et $V_n = g(n)$, sont adjacentes.
- 4 On note $C = \{M(x,y) \text{ tels que } : 1 \leq x \leq 2 \text{ et } y = f(x)\}$ l'arc de la courbe de f sur $[1, 2]$.
Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc C autour de (O, \vec{i}) , est :
$$\pi\left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2\right)$$

Exercice 2 :

1. Résoudre l'équation différentielle : (E) $9y'' + \pi^2 y = 0$
2. On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un plan muni d'un repère orthonormé, passe par le point $P(1, -\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Déterminer f .
3. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f(x) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2, -1]$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 - \ln(x))^2$

- 1) Etudier les variations de la fonction f .
- 2) a. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e, +\infty[$.
Montrer que g réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
b. Montre que pour tout $x \in [0, +\infty[$ $g^{-1}(x) = e^{1+\sqrt{x}}$
- 3) Dans le document 1 page 4 on a représenté la courbe (C) de f .
Tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1}
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_1^e (1 - \ln(t))^n dt$.
 - a. Calculer I_1 .
 - b. En utilisant une intégration par partie montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.
 - c. On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses respectifs 1 et e .
Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc \widehat{AB} de la courbe (C) autour de l'axe (O, \vec{i}) . Calculer V .

Exercice 4 :

Un quincaillier achète des ampoules à deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 70 % au premier fournisseur, 30 % au deuxième fournisseur.

Le premier fournisseur fabrique 97 % des ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 95 % des ampoules sans défaut.

- 1) On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note
 S l'événement « l'ampoule est défectueuse »,
 F_1 l'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur »,
 F_2 l'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur »
 - a. Calculer $P(S/F_1)$, $P(S \cap F_1)$ et $P(S)$.
 - b. Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne du premier fournisseur ?
- 2) On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité qu'une ampoule au plus soit défectueuse.
- 3) La durée de vie en heures d'une ampoule, notée X , suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$.
 - a. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures
 - b. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure moins de 50 000 heures.

Exercice 5 :

Une entreprise de services d'une ville cherche à modéliser la consommation des ménages sur les dernières années. Le rang $x_1 = 1$ est donné pour l'année 2009. La consommation est exprimée en milliers de dinars.

Année	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_j	1	2	3	4	5
Consommation en milliers de dinars y_j	28,5	35	52	70,5	100,5

1. Représenter le nuage de points $P_i(x_j; y_j)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1cm comme unité en abscisses et 1cm pour 10 000 Dinars en ordonnées).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage ; le placer dans le repère précédent.
3. On réalise un ajustement affine de ce nuage par la droite D d'équation $y = 12,5x + b$ qui passe par le point G.
 - a) Déterminer la valeur de b .
 - b) Tracer la droite D dans le repère précédent.
4. Déterminer, à l'aide de l'ajustement précédent, la consommation estimée des ménages de cette ville en 2016
5. Un nouvel ajustement de type exponentiel semble alors plus adapté.
 - a) Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $z = \ln y$. Les résultats seront arrondis au centième.

x_j	1	2	3	4	5
$z_j = \ln y_j$	3,35

- b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés à l'aide de la calculatrice on donnera les arrondis des coefficients à 10^{-2} .
- c) En déduire y en fonction de x
- d) Estimer alors à l'aide de ce nouvel ajustement, la consommation des ménages de cette ville en 2016 et Conclure .

Nom et prénom :

Document 1

