

Exercice n°1 : (4 points)

I) La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$.

1) Déterminer λ , arrondi à 10^{-1} près sachant que la probabilité : $P(T \leq 6) = 0,7$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2) Déterminer la valeur T_0 à un mois près vérifiant $p(T \geq T_0) = 0,5$

3) Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

II) 1) Un revendeur commande un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.

a) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un robot ayant une durée de vie inférieure à 6 ans.

b) Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus deux robots ayant une durée de vie inférieure à 6 ans.

2) Le lot de 10 robots est réparti comme suit : 8 robots de marque A et 2 de marque B mais ils sont emballés dans des paquets identiques donc on ne peut connaître la marque que si on ouvre cet emballage.

Un client veut acheter un robot de marque A donc le revendeur va ouvrir les emballages un par un jusqu'à ce qu'il trouve le premier robot de marque A.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre des paquets ouverts jusqu'à ce qu'il apparaisse un robot de marque A pour la première fois.

On note P_n la probabilité que le revendeur ouvre n paquets pour qu'un robot de marque A apparaisse pour la première fois.

a) Vérifier que $1 \leq n \leq 3$

b) Montrer que $P_1 = \frac{8}{10}$ et que $P_2 = \frac{16}{90}$

c) Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer son espérance.

Exercice n°2 : (4 points)

L'ampicilline est un antibiotique utilisé pour traiter les infections bactériennes.

Lorsqu'on l'injecte à un patient, la substance va s'infiltrer dans le réseau sanguin puis sera filtrée par les reins et le foie puis éliminée à une vitesse qui dépend de l'infection.

On injecte à un adulte malade une quantité de 500 mg et on note $f(t)$ la quantité d'ampicilline restante dans le corps à l'instant t exprimé en heure.

On sait que $f(t)$ est une solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay$ où a est un réel.

1) a) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation différentielle (E) en fonction de a .

b) Dédire que $f(t) = 500e^{at}$

c) Sachant que chez un adulte, 40% de l'antibiotique sera éliminé après une heure, déterminer la valeur de a à 10^{-1} près.

2) Dans la suite on prend **$a = -0,5$** .

a) Calculer la quantité restante après 3 heures.

b) Au cours de quelle heure la quantité restante est égale à 40mg ?

c) Sachant que l'antibiotique perd son efficacité si la quantité est inférieure à 9 mg, après combien d'heures le malade doit prendre la deuxième dose. (temps arrondi à l'unité)

Exercice n°3 : (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A(1,2,-1)$, $B(1,0,1)$, $C(2,1,-1)$.

1) a) Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan $P=(ABC)$.

2) Soit S l'ensemble des points d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et le centre.

b) Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle (C) dont on précisera le rayon et le centre H .

3) Soit Q le plan médiateur du segment [AB] et soit la droite $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

- Montrer qu'une équation du plan Q est : $y - z - 1 = 0$
 - Vérifier que $\Delta = P \cap Q$.
 - Déduire que pour tout point M de Δ on a $AM = BM$.
 - Montrer qu'il existe deux points du cercle (C) tel que $AM = BM$ dont on déterminera leurs coordonnées.
 - Déduire qu'il existe un unique point D du cercle (C) tel que ABD soit équilatéral.
- 4) Soit le point $N(\cos\theta + \sin\theta, -\sqrt{8}, \cos\theta - \sin\theta)$ où $\theta \in [0, \pi]$
- Vérifier que $N \in S$.
 - Montrer que le volume du tétraèdre ABCN égale $V = \frac{1}{3}[\sqrt{8} + 2(1 - \cos\theta)]$
 - Déterminer la valeur de θ pour que le volume V soit maximal.

Exercice n°4 : (7 points)

1) Soit la fonction f définie sur l'ensemble $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x\ln x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$

- Montrer que f est continue à droite de 0.
 - Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter graphiquement le résultat.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$
- Dresser le tableau de variation de f.
- 3) Dans l'annexe ci-joint on a tracé les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ respectivement par $x \rightarrow \ln x$ et $x \rightarrow \frac{1}{x}$
- Construire le point A de (C_1) d'abscisse e^{-1} et le point B de (C_2) d'abscisse $1 - e^{-1}$.
 - Déduire une construction du point C de la courbe (C_f) d'abscisse e^{-1} .
- 4) Soit la fonction g définie sur l'ensemble $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln x$.
- Etudier le sens de variations de g.
 - Déduire que $g(x) \geq 0$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $1 + x \ln x \geq x$
- c) Déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[: f(x) \leq \frac{1}{x}$ puis donner la position de (C_f) et (C_2) .
- d) Tracer dans l'annexe la courbe (C_f) .
- 5) Soit α un réel de $[1, +\infty[$, on note $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$
- Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $\frac{1}{x + x \ln x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$
 - Déduire que : $\ln(1 + \ln \alpha) \leq A(\alpha) \leq \ln \alpha$. (On remarque que : $\frac{1}{x + x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \ln x}$)
 - Déduire $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$



Tous nos meilleurs vœux de réussite

