Prof : Boufares Amor	Devoir de synthèse N°3 2010 / 2011	$4^{ème}$ Sciences exp.

ENONCE

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne les points $A(1,0,1)$, $B(-1,1,0)$, $C(2,1,0)$ et $I_\alpha(\alpha,-\alpha,\alpha)$ où α est un réel.

1) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2) En déduire que les points A, B et C définissent un plan P.
3) En déduire que l'équation cartésienne de P est $y + z - 1 = 0$.
4) En déduire que les points A, B, C et I_α ne sont pas coplanaires.
5) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCI_\alpha$ est indépendant de α.
6) Soit S_α la sphère de centre I_α et tangente au plan P au point H_α.

a) Déterminer les coordonnées de H_α.

b) Soit Δ l'ensemble des points H_α lorsque α décrit l'ensemble R.Déterminer la nature de Δ.

Exercice 2

La courbe Γ ci-dessous représente la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur R*.
On sait que $f(0) = -1$ et on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1) Par lecture graphique déterminer :

a) Le signe de f''

b) Les points d'inflexion de $\mathcal{C}$.

2) La fonction f' est définie sur R par $f'(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln(x) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Sans expliciter $f''(x)$, dresser le tableau de variation de f'.

b) Calculer $f'(e)$ et en déduire le signe de f'

3) a) Montrer que la fonction : $x \xrightarrow{h} \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{3}{4}x^2$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction :

$x \xrightarrow{k} x\ln(x) - x$

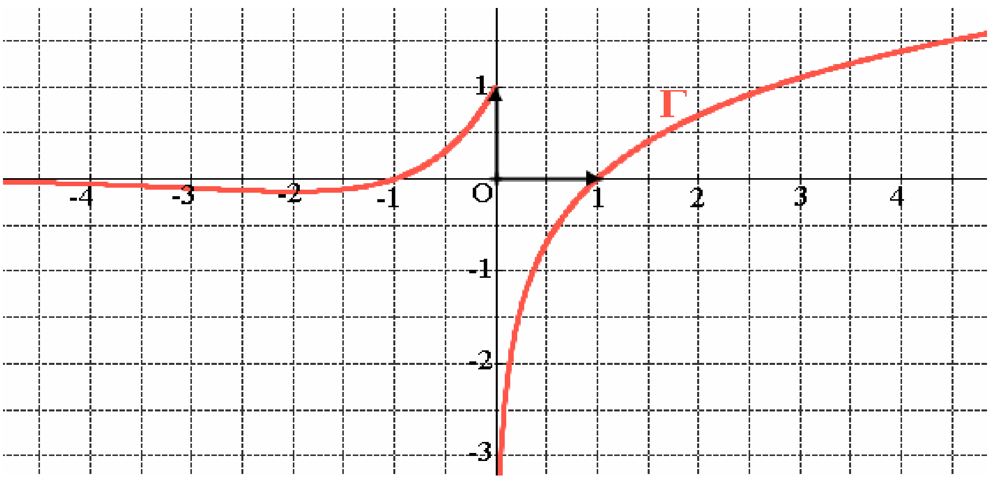
b) Montrer que pour tout réel x on a $\int_0^x te^t dt = (x-1)e^x + 1$

c) En déduire l'expression explicite de f

4) Dresser le tableau de variation de f

5) Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$

6) Tracer $\mathcal{C}$ et ses tangentes en leurs points d'inflexion.



Exercice 3

Soit U la suite définie sur N par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \int_0^{U_n} \dfrac{dx}{3+\sin(x)} \end{cases}$ pour tout $n \in N$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$

2) Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1}{3+\sin(x)} \leq \dfrac{1}{2}$.

3) En déduire que pour tout entier naturel n, $0 < U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur [0, +∞ [par $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{\ln(x)}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

3) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.Interpréter.

5) Soit g la fonction définie sur]0, +∞ [par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Etudier le sens de variation de g

b) En déduire le signe de g

6) a) Montrer que pour tout réel $x > 0, f'(x) = g(x)e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

b) En déduire le tableau de variation de f

7) Tracer $\mathcal{C}$.

CORRIGE

Exercice 1

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent un plan unique P.

3) On sait que le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal de P donc l'équation de P est -3y – 3z + d = 0 or le point A(1, 0,1) appartient à P donc -3 + d = 0 donc d = 3 d'où P : y + z – 1 = 0.

4) On a $-\alpha + \alpha - 1 = -1 \neq 0$ donc $I_\alpha \notin P$ donc les points A, B, C et I_α ne sont pas coplanaires.

5) Soit V le volume du tétraèdre ABCI_α alors $V = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI_\alpha}\right|$ or $\overrightarrow{AI_\alpha}\begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ -\alpha \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$ donc $V = \dfrac{1}{6}|3\alpha - 3\alpha + 3|$

d'où $V = \dfrac{1}{2}$

6) a) $H_\alpha(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de I_α sur P $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{H_\alpha I_\alpha} \text{ et } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \\ H_\alpha \in P \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha - x = 0 \\ -\alpha - y = -3t \\ \alpha - z = -3t \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + 3t \\ z = \alpha + 3t \\ -\alpha + 3t + \alpha + 3t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + \frac{1}{2} \\ z = \alpha + \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow H_\alpha\left(\alpha, -\alpha + \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right)$$

b) $M(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{2} - \alpha \\ z = \frac{1}{2} + \alpha \end{cases}$ donc Δ est la droite passant par le point $D\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1) a)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

b) Les points d'abscisses respectives -1 et 1 sont deux points d'inflexion de $\mathcal{C}$

2) a)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f' = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f' = \lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x) - 1) = +\infty$.

b)

x	$-\infty$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3) a) La fonction h est dérivable sur$]0, +\infty[$ et $h'(x) = 2\frac{1}{2}x\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x} - \frac{3}{4}2x = x\ln(x) - x = k(x)$ donc h est une primitive de k sur$]0, +\infty[$.

b) On pose $\begin{cases} U'(t) = e^t \\ V(t) = t \end{cases}$ alors $\begin{cases} U(t) = e^t \\ V'(t) = 1 \end{cases}$ d'où $\int_0^x te^t dt = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - \left[e^t\right]_0^x = xe^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1$

c) La fonction $x : \mapsto (x-1)e^x + 1 + a$ où a est un réel constant est une primitive de la restriction de f' à$]-\infty, 0]$.
La fonction $h + b$ où b est un réel constant est une primitive de la restriction de f' à$]0, +\infty[$.
Or f est continue en 0 puisqu'elle est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ donc :
$\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{0^-} f = f(0) = -1$ donc $b = a + 1 - 1 = -1$ donc $a = b = -1$.

Conclusion : $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x & \text{si } x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{3}{4}x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4)

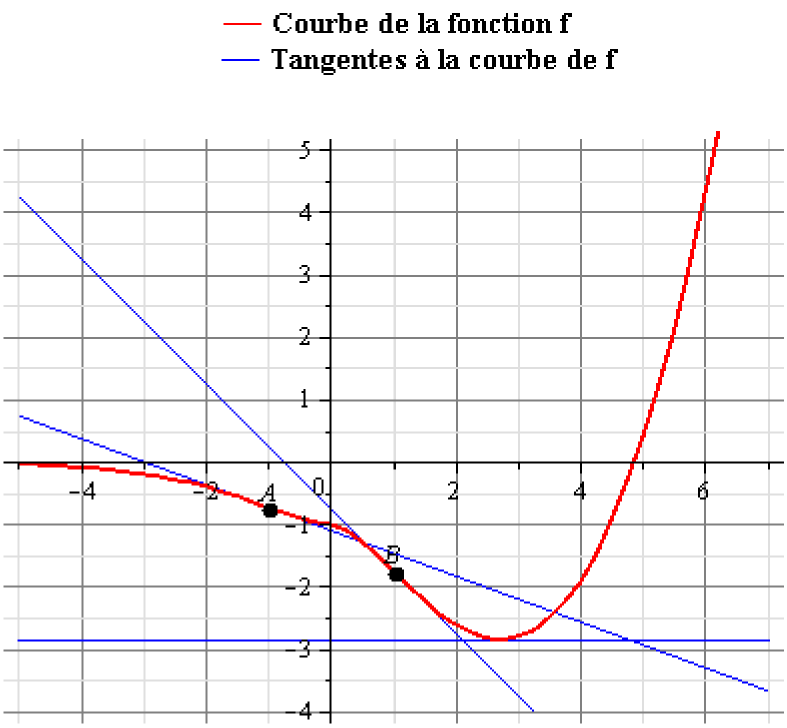
x	$-\infty$		e		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{e^2+4}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x - e^x) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{1}{2}\ln(x) - \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

5) On a $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1}{2}\ln(x) - \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$ donc $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

6) Soit $A\left(-1, -\dfrac{2}{e}\right)$ et $B\left(1, -\dfrac{7}{4}\right)$ les points d'inflexion de $\mathcal{C}$. On a $f'(-1) = -\dfrac{1}{e}$ et $f'(1) = -1$.



Exercice 3

1) ☻ On a $U_0 > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

☻ Supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3+\sin(x)}$ est continue et strictement positive sur l'intervalle $[0, U_n]$ donc $\displaystyle\int_0^{U_n} \dfrac{dx}{3+\sin(x)} > 0$ d'où $U_{n+1} > 0$.

<u>Conclusion</u> : pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

2) On sait que pour tout réel x, $-1 \le \sin(x) \le 1$ donc $2 \le 3 + \sin(x) \le 4$ donc $\dfrac{1}{3+\sin(x)} \le \dfrac{1}{2}$

3) On a $\begin{cases} \text{pour tout réel } x > 0, \dfrac{1}{3+\sin(x)} \le \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, U_n > 0 \end{cases}$ donc $\displaystyle\int_0^{U_n} \dfrac{dx}{3+\sin(x)} \le \int_0^{U_n} \dfrac{1}{2}dx$ donc $U_{n+1} \le \dfrac{1}{2}U_n$

4) a) ☻ On a $0 < U_0 \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

☻ Supposons que $0 < U_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $0 < U_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On sait que $0 < U_{n+1} \le \frac{1}{2}U_n \le \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $0 < U_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

<u>Conclusion</u> : pour tout entier naturel n, $0 < U_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) On a $\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 < U_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

<u>Exercice 4</u>

1) Puisque $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{0^+} f = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

3) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)\left(\frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}}\right)$

$= \lim\limits_{X\to0^+}\frac{e^X - 1}{X} = 1$ où on a posé $X = \frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$.

Interprétation : $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation y = x au voisinage de $+\infty$.

5) a) g est dérivable sur$]0, +\infty[$et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\ln(x) - \frac{1}{x}\frac{1}{x} = \frac{\ln(x)-2}{x^2}$

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	||	-	0	+	
Sens de variation de g	||	décroissante	$\frac{e^2-1}{e^2}$	croissante	

b) $\frac{e^2-1}{e^2}$ est le minimum de g sur l'intervalle$]0, +\infty[$donc g est strictement positive sur l'intervalle$]0, +\infty[$

6) a) Soit x > 0 alors $f'(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\ln(x) + \frac{1}{x}\right) = g(x)e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

b)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

7)