

Lycée TheLepTe

Mai 2012

CorreCtion du devoir de synthèse n°3

Niveau : 4 ème Science expérimentales

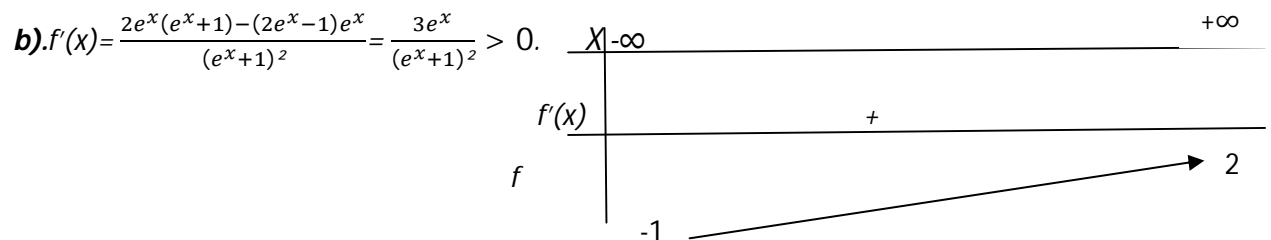
Epreuve : Mathématiques

Prof : Mhamdi Abderrazek

EXERCICE N° 1 :

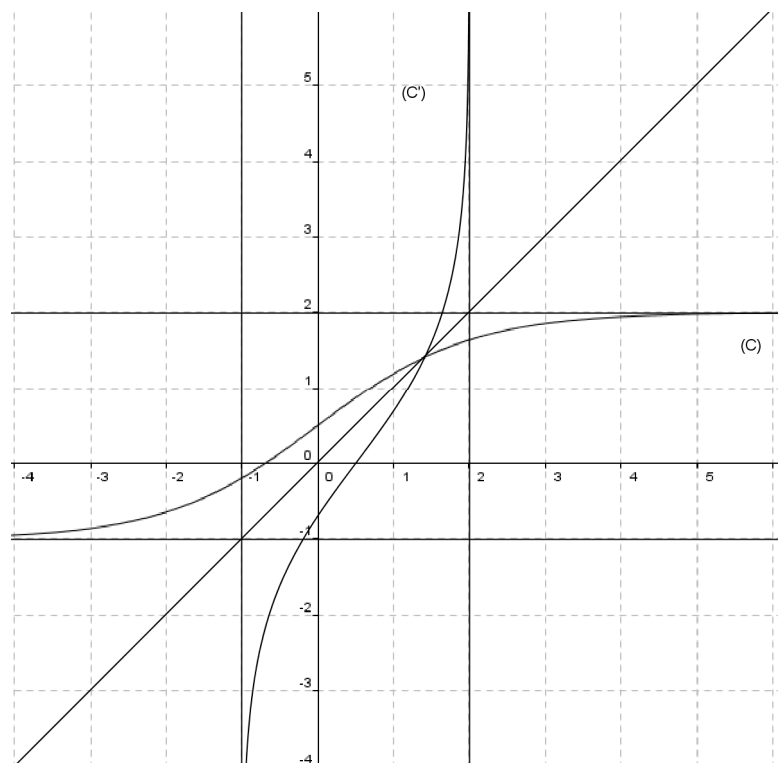
1).a). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(2 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = 2$. La droite d'équation $y=2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \frac{-1}{1} = -1$. La droite d'équation $y=-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.



2).a). $f(x)=0$ signifie $2e^x - 1 = 0$ signifie $e^x = \frac{1}{2}$ signifie $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

b).





3).a). On a f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} donc f est une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R}) =]-1 ; 2[= I$.

b). $(C') = S_D(C)$ où D est la droite d'équation $y=x$.

$$4).a). \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in]-1 ; 2[\end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} f(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f(y)=x \text{ signifie } \frac{2e^y-1}{e^y+1} = x \text{ signifie } 2e^y - 1 = xe^y + x \text{ signifie } e^y = \frac{x+1}{2-x} \text{ signifie } y = \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$$

$$d'où f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) \forall x \in]-1 ; 2[$$

b). $J = \int_{0.5}^1 \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) dx = \int_{0.5}^1 f^{-1}(x) dx$ est l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0.5$ et $x=1$

Par raison de symétrie par rapport à la droite $D : y=x$ on a J est l'aire du rectangle de dimensions $\ln(2)$ et 1 privée de l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln(2)$

$$d'où J = (1 \times \ln(2)) - \int_0^{\ln(2)} f(x) dx = \ln(2) - \int_0^{\ln(2)} \left(3 \frac{e^x}{e^x+1} - 1\right) dx$$

$$= \ln 2 - [3 \ln(e^x + 1) - x]_0^{\ln 2} = 5 \ln(2) - 3 \ln(3) = \ln(32) - \ln(27) = \ln\left(\frac{32}{27}\right) \text{ u.a.}$$

EXERCICE N° 2 :

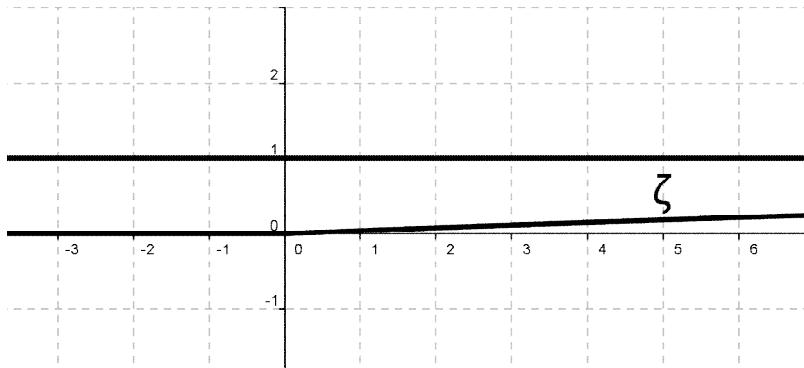
1).a). $p(X=10) = 0$.

b). $p(5 \leq X \leq 12) = e^{-5 \times 0.04} - e^{-12 \times 0.04} = e^{-0.2} - e^{-0.48}$.

c). $p(X \geq 15) = e^{-15 \times 0.04} = e^{-0.6}$.

2). $p((X \leq 15) / (X \geq 10)) = \frac{p((X \leq 15) \cap (X \geq 10))}{p(X \geq 10)} = \frac{p(10 \leq X \leq 15)}{p(X \geq 10)} = \frac{e^{-0.4} - e^{-0.6}}{e^{-0.4}}$.

3). $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ p(0 \leq X \leq x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ signifie } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-0.04x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



EXERCICE N° 3:

1.a). Si (C) est la courbe de f' alors $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur \mathbb{R} ce qui est absurde d'où (C) est la courbe de f et (C') est la courbe de f' .

b). L'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$ est $\int_0^4 f'(x) dx = f(4) - f(0) = 3,925$ u.a.

2.a). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$.

b.i). $f(x) = \ln\left(e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = x + \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$.

ii). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 0$ signifie $\Delta : y=x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

c). $\forall x \in [0; +\infty[$ on a $1 - \frac{x}{e^x} \leq 1$ signifie $\ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \leq \ln(1)$ signifie

$f(x) - x \leq 0$ d'où (C) est en dessous de Δ sur $[0; +\infty[$.

3.a). pour $n=0$ on a $u_0 = 2 > 0$ (vrai)

.Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$ (car $f(x) > 0 \forall x > 0$)

Conclusion : $u_n > 0 \forall n > 0$.

b). On a $f(x) - x < 0 \forall x > 0$ et $u_n > 0$ donc $f(u_n) - u_n < 0$



Signifie $u_{n+1} < u_n$ d'où (u_n) est décroissante.

c). voir annexe.

d). (u_n) est convergente vers 0.

EXERCICE N° 4:

1). $y' - 2y = 0$ signifie $y' = 2y$ signifie $y = k e^{2x}$ ($k \in \mathbb{R}$)

2). $g(x) = a x + b$ signifie $g'(x) = a$

g est une solution de (E) signifie $g'(x) - 2g(x) = 4x + 12$ signifie $a - 2(a x + b) = 4x + 12$

signifie $-2ax + a - 2b = 4x + 12$ signifie $-2a = 4$ et $a - 2b = 12$ signifie $a = -2$ et $b = -7$ d'où . . .
 $g(x) = -2x - 7$.

3). a). f est une solution de (E) signifie $f'(x) - 2f(x) = 4x + 12 = g'(x) - 2g(x)$

Signifie $(f-g)' - 2(f-g) = 0$ signifie $(f-g)$ est une solution de (E_0)

b). f est une solution de (E) signifie $(f-g)$ est une solution de (E_0) signifie $f(x) - g(x) = k e^{2x}$ ($k \in \mathbb{R}$) signifie $f(x) = g(x) + k e^{2x}$ ($k \in \mathbb{R}$) signifie $f(x) = -2x - 7 + k e^{2x}$.

EXERCICE N° 5:

1). a).

| | | | | | | |
|---|---|------|------|------|------|------|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Z | 0 | 1,79 | 3,40 | 4,39 | 5,14 | 5,70 |

$$b). \bar{X} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 3,5. \bar{Z} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 z_i \approx 3,4$$

$$c). r = \frac{\text{cov}(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z} \approx 0,98$$

$$d). D : Z = a X + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(X,Z)}{v(X)} \approx 1,13 \text{ et } b = \bar{Z} - a \bar{X} \approx -0,55$$

e). On a $Z = 1,13 X - 0,55$ signifie $\ln(Y) = 1,13 X - 0,55$ signifie



$$Y = e^{1,13 X - 0,55} = e^{1,13 X} \cdot e^{-0,55} \text{ or } \ln(3,1) \simeq 1,13 \text{ et } e^{-0,55} \simeq 0,58$$

$$\text{d'où } Y \simeq 0,58 \cdot e^{X \ln(3,1)} \simeq 0,58 \cdot e^{\ln(3,1)^X} \simeq 0,58 \cdot (3,1)^X$$

2). $X \geq 10$ alors $Y \geq 0,58 \cdot (3,1)^{10}$ donc ce capital dépasse 47538440 dinars

BON TRAVAIL