série n°18 4ème.sc

Exercice N°1:

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 3$.

b) Etudier la monotonie de U

c) Montrer que U est convergente et préciser sa limite

2/ Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Retrouver la limite de la suite U

3/ On considère la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = \dfrac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$

a) Vérifier que $W_n = 1 - V_n$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}(1 - (\frac{1}{4})^{n+1})$

c) Calculer la limite de $\dfrac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$

Exercice N°2:

On considère une urne contenant 3boules noires et une boule blanche et un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche.

Une épreuve consiste à lancer le jeton, si la face visible est blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si la visible est noire, on ajoute une boule noire dans l'urne ; puis on tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne

1) On considère les évènements :

E_0 : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées ».

B : «La face visible du jeton est blanche ».

a- Vérifier que P(B)= $\frac{1}{2}$

b-Schématiser la situation avec un arbre de choix

c- Montrer que P(E_0 /B)= $\frac{1}{10}$ et P(E_0 /$\bar{B}$)= $\frac{2}{5}$. En déduire P(E_0).

d-Sachant qu'aucune boule blanche ne figure dans le tirage , quelle est la probabilité que la face visible du jeton soit noire.

2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

3) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois, une et une seule boule blanche.

Exercice N°3:

Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20 % au premier fournisseur, 50 % au deuxième fournisseur et 30 % au troisième fournisseur.
Le premier fournisseur fabrique 97 % d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98 % d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95 % d'ampoules sans défaut.

1. On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note D l'événement « l'ampoule est défectueuse », F_1 l'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur », F_2 l'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur » et F_3 l'événement « l'ampoule provient du troisième fournisseur ».
   (a) Calculer la probabilité de l'événement D, notée $P(D)$.
   (b) Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité $P_D(F_1)$ qu'elle provienne du premier fournisseur ?
   Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de $P_D(F_1)$.

2. On suppose que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969.
On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité R qu'une ampoule au plus soit défectueuse.
On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de R.

3. La durée de vie en heures d'une ampoule, notée T, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{50000} = 2.10^{-5}$.

Selon cette loi, pour tout x de $[0,+\infty[$, $P(T \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$.

   (a) Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_1.
   (b) Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_2.
   (c) Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_3.

Exercice N°4:

Un appareil de mesure évalue l'épaisseur (en cm) de pièces mécaniques. L'expérience prouve que l'épaisseur d'une pièce peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme dans l'intervalle [0,1]

1/ Calculer $P(X = 0,6)$ et $P(0,3 \leq X \leq 0,5)$

2/ Les pièces sont acceptées si l'épaisseur est supérieur à 0,6 cm.
Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?

3/ Une pièce a une épaisseur supérieur à 0,3. Quelle est la probabilité qu'elle soit acceptée ?