série révision 2 $_s$ 4ème.sc

Exercice N°1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x(2 - \ln(x))$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire l'image de l'intervalle [1, e] par f.

2) On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $1 \leq u_n \leq e$.

b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - \ln(u_n))$ et en déduire que (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) Pour tout $n \in$ IN, on pose $V_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Montrer que $V_n = 2 - \ln(u_n)$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ puis retrouver la limite de la suite (U_n).

Exercice N°2

Les points A. B et C ont pour coordonnées respectives: A (3 ; – 2 ; 2), B (6; 1 ; 5) et C (6; – 2 ; – 1).

I. 1) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2) Soit P le plan d'équation cartésienne : $x + y + z - 3 = 0$. Montrer que P est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par le point A.

1) Soit Q le plan perpendiculaire à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne de Q.

2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et Q.

II. 1) Soit le point D (0 ; 4 ; - 1).Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2) Calculer le volume du tétraèdre ABDC.

3) Montrer que l'angle géométrique $B\hat{D}C$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radians.

4) a) Calculer l'aire du triangle BDC.

b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

III. Soit S l'ensemble des points M(x,y ,z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 9x - 5y - z + 2 = 0$

1) Démontrer que S est une sphère de centre $\Omega\left(\frac{9}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

2) Vérifier que la sphère S est circonscrite au tétraèdre ABCD.

3) Montrer que l'intersection du plan (ABC) et S est un cercle ζ à caractériser

Exercice N°3

Une urne contient deux jetons blancs numérotés : 1 , -1 et trois jetons noirs numérotés 1,1,-1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

1/ On tire simultanément deux jetons de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir deux jetons de même couleur »

B : « Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro »

b) On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés

Déterminer la loi de probabilité de X et Calculer son espérance mathématique

2/ On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne

On désigne par a le numéro inscrit sur le premier jeton tiré et par b le numéro inscrit sur le deuxième.

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les plans P et P' d'équations respectives : $x + ay + b = 0$ et $x + by - a = 0$

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

C : « P et P' sont parallèles »

D : « P et P' sont perpendiculaires »

Exercice N°4

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+e.x-e$

1/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{\ln x}{x}+e$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation $g(x)=e$

c) Calculer $g(\frac{1}{e})$ en déduire le signe de $g(x)$

2/a) Vérifier que $f'(x)=g(x)$

b) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

c) Montrer que ζ_f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=e.x$

d) Dresser le tableau de variation de f

3/a) Ecrire l'équation de la droite (T) tangente à ζ_f au point I d'abscisse 1

b) Etudier la position relative de ζ_f et (T)

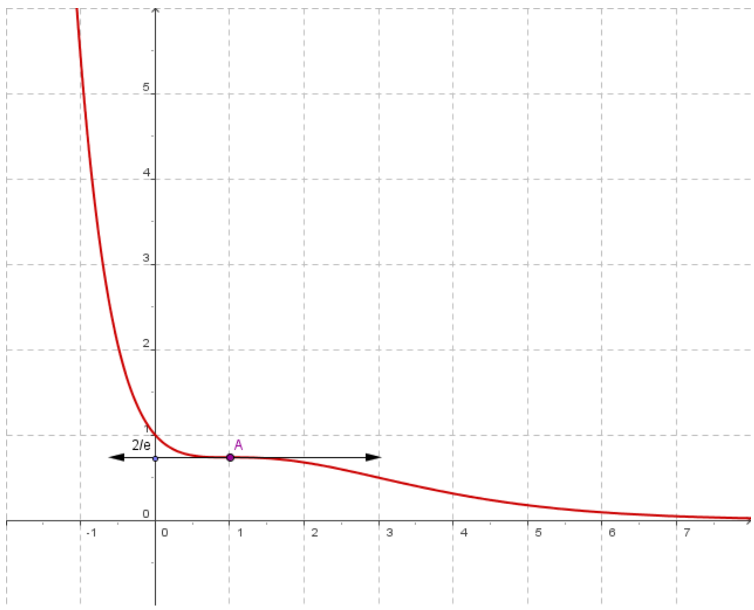
c) Tracer ζ_f et (T)

Exercice N°4

On considère une fonction f définie sur IR.

A) La courbe (C) ci-dessous est celle de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

* La courbe (C) de f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$
* La tangente à la courbe (C) au point $A\left(1,\frac{2}{e}\right)$ est parallèle à $(O,\vec{i})$.
* La droite $(O,\vec{i})$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.



En utilisant le graphe :

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2/ Préciser le sens de variation de f.

3/ Déterminer f(1) et f '(1).

4/ Que représente le point A pour (C).

B) La courbe (C) est en fait celle de la fonction définie sur IR par $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation respective $x = 0$ et $x = n$.

1/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I_n=\int_0^n xe^{-x}dx$.

2/ Vérifier que la fonction f est solution sur IR de l'équation différentielle : $y'+y=2xe^{-x}$.

3/ a) En déduire que $A_n=2I_n-f(n)+1$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.