série révision 3 s

4ème.sc

Exercice N°1

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(1-\ln x)^2$.

1/ Etudier les variations de f.

2/ Soit g la restriction de f sur $[e;+\infty[$

a- Montrer que g réalise une bijection de $[e;+\infty[$ sur J.

b- Montrer que pour tout $x\in J$ on a : $g^{-1}(x)=e^{(1+\sqrt{x})}$.

3/ Construire Cf et Cg^{-1} dans le même repère.

4/ Soit un entier naturel n>1. On pose $U_n=\int_1^e(1-\ln t)^n\,dt$

a- Calculer U_1.

b- Montrer que : $U_{n+1}=-1+(n+1)U_n$.

c- Soit A et B les points de Cf d'abscisse respectives 1 et e.

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ autour de l'axe des abscisses

Exercice N°2

Soit f et F les fonctions définies par $f(t)=\dfrac{e^t}{e^t+t^2}$ et $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1/ Montre que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner le sens de variation de F

2/a) Etudier les variations de f sur $[2,+\infty[$

b) En déduire que pour tout t de $[2,+\infty[$ on a : $f(t)\geq f(2)$

c) Montrer que pour tout x de $[2\ ,+\infty[$ on a $F(x)=F(2)+\int_2^x f(t)dt$

d) En déduire que pour tout x de $[2\ ,+\infty[$ on a $F(x)\geq F(2)+(x-2)f(2)$

e) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

Exercice N°3

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1/ Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre I(1 , -2 , 0)et de rayon R = 2

2/ Montrer que la sphère S est tangente au plan P : $x+2y-2z+9=0$

3/ Soit Q le plan d'équation : $-2x+y-1=0$. Déterminer $S\cap Q$

4/ a) Montrer que $P\perp Q$

b) Soit $D=P\cap Q$, montrer que $d(I,D)=3$

5/ On considère les plans P_m d'équations : $mx+\ln(m)=0$; $m\in[1\ ,\ +\infty[$

a) Calculer $d(I\ ,\ P_m)$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[1\ ,+\infty[$ par $f(m)=1+\dfrac{\ln(m)}{m}$

c) Montrer que pour tout $m\in[1,+\infty[$, $P_m\cap S$ est un cercle

Exercice N°4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points
A(1, 0, 0) , B(1, -1, 0), C(1+cosθ, -1, sinθ) et D(0, -1, 0)

1) Montrer que ABD est un triangle rectangle en B.

2) Soit S : l'ensemble des points M(x, y, z) tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

a) Montrer que S est la sphère de centre B et de rayon 1.

b) Vérifier que C et D sont deux points de S.

c) Pour quelles valeurs de θ, [CD] est un diamètre de S.

3) Soit Q le plan d'équation : $x - y + z - 1 = 0$.

a) Montrer que (AD) est incluse dans Q.

b) Montrer que $S \cap Q$ est un cercle (ζ) dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit le plan P_θ : $(\cos\theta)\, x + (\sin\theta)\, z - \cos\theta - 1 = 0$.

a) Montrer que (AB) est parallèle à P_θ.

b) Montrer que P_θ est tangent à S en C.

Exercice N°5

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par

$u_0 = 1$ et $v_0 = 2$, pour tout n de IN $u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$ et $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$

ou α un réel donné tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1) Soit (t_n) la suite définie sur IN par $t_n = v_n - u_n$.

a- Calculer t_0 et t_1 .

b- Montrer que pour tout entier naturel n $t_n = (2\alpha - 1)^n$.

c- En déduire la limite de t_n .

2) a- Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$.

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante

c- En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ .

d- Les suites (u) et (v) sont- elles adjacentes ?

e- Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n + v_n = 3$ et en déduire la valeur de ℓ

Exercice N°6

1/a) Vérifier que $i e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

b) Résoudre dans ℂ l'équation (E) : $z^2 - 2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$, B d'affixe $z_B = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et C d'affixe $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$

a) Montrer que le quadrilatère OACB est losange
b) Placer les points A , B et C
c) Calculer l'aire du losange OACB