série n°11 — 4ème.SC

EXERCICE N°1

I/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2-1 + \ln x$

1/ Dresser le tableau de variation de g

2/ Calculer g (1) et en déduire le signe de g(x) pour x de $]0,+\infty[$

II/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x-1-\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm)

1/a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le tableau de variation de f.

2/a) Montrer que la droite (Δ) d'équation : y = x - 1 est une asymptote à (ζ_f)

b) Etudier la position de (ζ_f) par rapport à (Δ)

3/ Tracer (Δ) et (ζ_f)

4/ Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1,+\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h ; Tracer dans le même repère que (ζ_f), la courbe représentative $(\zeta_{h^{-1}})$ de h^{-1}

5/ Déterminer la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui prend la valeur 3 pour x = 2.

EXERCICE N°2

On Considère une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	-3

On note (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1/ Répondre par vraie ou faux sans justification

a) 0 est un minimum local de f

b) La droite d équation x = 2 est une asymptote à (ζ_f)

c) La droite d équation y = -3 est une asymptote à (ζ_f)

d) La courbe (ζ_f) admet une asymptote oblique

2/ Déterminer le signe de f(x) pour $x \in]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

3/ Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln(|f(x)|)$

a) Montrer que g est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$

b) Donner le tableau de variation de g

Donner une allure de la courbe (ζ_g) de g dans un repère orthonormé

EXERCICE N°3

Répondre par vrai ou faux :

1) Soit A, B et C sont trois points du plan.

a) Si A, B et C sont trois points alignés alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

b) L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

2) Soit R= $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On a alors :

a) $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{k}$

b) $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

3) Soit A et B deux points distincts de l'espace.

a) L'ensemble des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ est un plan.

b) L'ensemble des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 1$ est un plan.

EXERCICE N°4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
On considère les points $A(2,3,-1); B(4,0,2)$ et $C(3,2,1)$

1/a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) Calculer $\sin(B\widehat{A}C)$ et $\cos(B\widehat{A}C)$

c) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) noté P

2/ Soit $Q = \left\{M(x, y, z) \in \xi \text{ tel que } \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0\right\}$

a) Montrer que Q est un plan dont une équation cartésienne est $3x - 4y + 5z = 0$

b) Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique

3/ Soit H le projeté orthogonale du point C sur (AB)

a) Calculer l'aire du triangle ABC

b) Déduire la distance CH