série n°13 **4ème.SC**

EXERCICE N°1

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant un repère de l'espace ξ

Soit P et Q les plans d'équations respectives : $x + 2y - z + 1 = 0$ et $x - y - z - 2 = 0$

1/ Montrer que P et Q sont perpendiculaires

2/ a) Donner une équation cartésienne de la sphère de centre I (1 , 2 ,0) et tangente à P

b) Montrer que S et Q sont sécants et caractériser $S \cap Q$

3/ soit $\Delta = P \cap Q$

a) Calculer $d(I,\Delta)$

b) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S' de centre I et tangente à Δ

c) Donner les coordonnées du point de contact de Δ et S'

Exercice N°2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(3,2,6)$; $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$

1/a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b Montrer que OABC est un tétraèdre.

c) Calculer le volume du tétraèdre OABC

2/ Soit H le projeté orthogonale du point O sur le plan (ABC)

Montrer que $OH = \dfrac{4}{3}$

3/ Soit S la sphère de centre O et passant par A

a) Montrer que l'intersection de S avec le plan (ABC) est cercle ζ de centre H

b) Calculer le rayon du cercle ζ

Exercice N°3

Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Choisir cette réponse.

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1/ Soit Δ une droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $d(O,\Delta) = 0$ b) $d(O,\Delta) = \sqrt{3}$ c) $d(O,\Delta) = 3$

2/ L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à

a) $\|\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}\|$ b) $\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB}\|$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

3/ Soit D une droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -\alpha + 3 \\ z = \alpha - 2 \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Un vecteur directeur de D est

a) $\vec{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{V}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice N°4

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)+\dfrac{2x}{1+x}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Vérifier que pour tout x de $]-1,+\infty[$ $\text{on a}: f'(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat

b) Dresser le tableau de variation de f

2/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^1 définie sur un intervalle que l'on précisera

3/ Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-x$

On donne le tableau de variation de h

x	-1		1		$+\infty$
h(x)	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer que l'équation h(x)=0 admet dans $]-1,+\infty[$ deux solutions 0 et α tel que : $2,7<\alpha<2,9$

b) En déduire la position relative de ζ_f et la droite D : y = x.

4/a) Donner une équation de la tangente (T) à ζ_f au point O

b) Tracer (T) , (D) et ζ_f

EXERCICE N°5

I/ Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^x-x$

1/ Etudier les variations de f

2/ En déduire que $\forall x\in IR : f(x)\geq 1$

II/ Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$

On désigne par (ζ_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1/a) En utilisant I-2), montrer que g est définie sur IR

b) Calculer les limites de g au voisinage de $(+\infty)$ et de $(-\infty)$

c) Interpréter géométriquement les résultats obtenus

3/a) Montrer que g est dérivable sur IR et que $\forall x\in IR : g'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{(f(x))^2}$

b) Dresser le tableau de variation de g

4/a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (ζ_g) au point O (0 , 0)

b) Vérifier que $\forall x\in IR : g(x)-x=x(\dfrac{1}{f(x)}-1)$

c) En utilisant I-2) déduire la position de (ζ_g) par rapport à (T)

5/ Tracer (T) et (ζ_g)