série n°14 4ème.sc

Exercice N°1

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points

$A(-1,-1,1)$, $B(3,2,-1)$ et $C(1,\frac{1}{2},1)$

1 /a) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P défini par les points A, B et C est : $3x - 4y - 1 = 0$

2/ Soit m un réel. On considère l'ensemble S_m des points M(x,y,z) de ξ tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 2m = 0$$

Montrer que S_m est une sphère dont on précisera le rayon R_m et les coordonné du centre I_m

3/a) Vérifier que $d(I_m, P) = \frac{|m+5|}{5}$

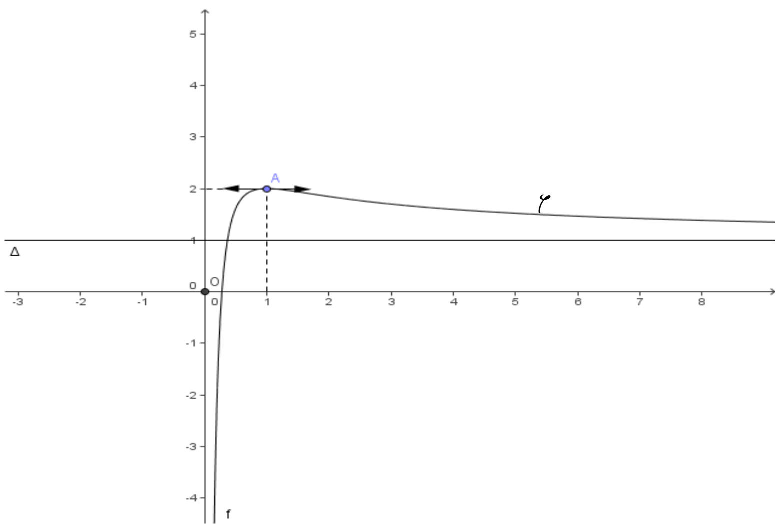
b) Etudier, suivant les valeurs de m, la position relative de S_m et P

c) Montrer que l'intersection de S_5 et P est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

4/ Déterminer m pour que S_m passe par O

Exercice N°2

I/ La courbe ζ_f ci-dessous représente une fonction f définie sur $]0,+\infty[$; les droite d'équation x = 0 et y =1 étant des asymptotes à cette courbe



1/ En utilisant le graphique, déterminer :

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) Le tableau de variation de f

2/ on suppose que l'expression de f(x) est de la forme $f(x) = a + \frac{b}{x} + c\frac{\ln x}{x}$ où a,b et c sont trois nombres réels .

a) Montrer que, pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{b}{x^2} + c(\frac{1-\ln(x)}{x^2})$

b) Montrer, en se référant au graphique, que les réels a,b et c vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ c - b = 0 \end{cases}$$

c) Déduire alors l'expression de f(x)

II/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^{-x})$

1/ Montrer que pour tout réel x, on a $g(x) = (1-x)e^x + 1$

2/a) Montrer que $g'(x) = -xe^x$ puis dresser le tableau de variation de g

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

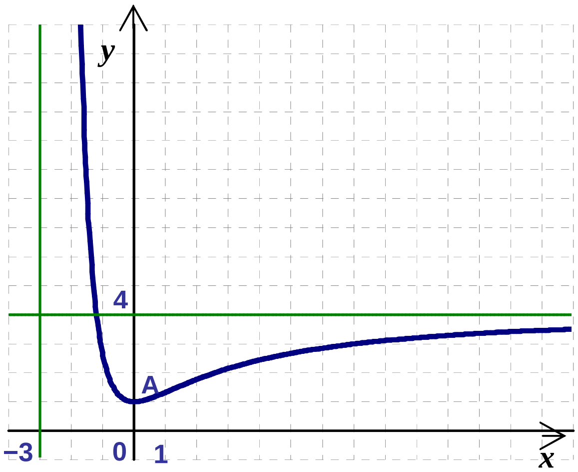
3)a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 1{,}5$

b) Tracer ζ_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice N°3

La courbe (C) donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$

On sait que le point A de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe (C) et que la fonction f admet un minimum pour $x = 0$. En outre, les droites d'équations respectives $y = 4$ et $x = -3$ sont asymptotes à la courbe (C).



I/ Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte.

On demande de cocher cette réponse

1) La limite de la fonction f en $+\infty$ est :	• $+\infty$ • -3 • 4
2) On note f ' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle]-3 ; $+\infty$ [.	• $f'(0) = 1$ • $f'(1) = 0$ • $f'(0) = 0$
3) L'équation de la tangente à la courbe (C) au point A est :	• $y = 1$ • $y = x$ • $y = 0$
4) Sur l'intervalle]-3 ; $+\infty$ [, l'équation $f(x) = x$	• n'admet aucune solution • admet comme solution unique : $x = 0$ • admet une solution unique appartenant à l'intervalle]1 ; 2[

Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$ par $g = \ln\circ f$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

5) Si $x = 0$, alors	• on ne peut pas calculer $g(x)$ • $g(x) = 1$ • $g(x) = 0$
6) On peut affirmer que sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$	• g a les mêmes variations que la fonction ln • g a les mêmes variations que la fonction f • g a les variations inverses de celles de la fonction f

II/1/ Dresser le tableau de variation de $g = \ln\circ f$

2/ Donner une allure de la courbe de g