série n°15 — 4ème.SC

EXERCICE N°1

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$

1/ a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n > 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante

c) En déduire que la suite U est convergente vers une limite à préciser

2/ On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = 3 + \dfrac{1}{U_n - 1}$

a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE N°2

Soit la suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/a) Montrer que la suite u est minorée par 3

b) Montrer que la suite u est décroissante

c) En déduire que la suite u est convergente

2/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 \le \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 \le (\dfrac{1}{3})^n$.

c) Calculer la limite de la suite u

Exercice N°3

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 \end{cases}$

1/a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < U_n \le \dfrac{1}{2}$

b) Montrer que U est une suite strictement décroissante

c) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite l

2/ On pose $V_n = \ln(U_n)$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n < 0$

b) Montrer que V est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

d) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE N°4

On pose $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}dx$

1/ Calculer I_0 et I_1

2/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ I_{n+1} = \dfrac{1}{2}((n+1)I_n - e^{-2})$ et en déduire que $I_2 = \dfrac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$

b) Donner la valeur de $J=\int_0^1 (5x^2+x-3)e^{-2x}dx$

3/a) Montrer que $\forall x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le x^n e^{-2x} \le x^n$

b) Montrer que $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE N°5

I-Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle :]0 ; +∞[par : $g(x)=x-x\ln(x)$

1/ Montrer que g est dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[et que : $g'(x)=-\ln(x)$

2/ Dresser le tableau de variation de la fonction g.

II- On donne les suites U et V définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\dfrac{e^n}{n^n}$ et $V_n=\ln(u_n)$.

1/ a) Montrer que $v_n = n - n\ln(n)$.

b) En utilisant la partie (I) , déterminer le sens de variation de la suite (v_n)

c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

EXERCICE N°6

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	0	↗	2

On donne : $f(1)=\dfrac{2e}{e+1}$

$f(2)=\dfrac{2e^2}{e^2+1}$

On donne la fonction h(x) = f(x) – x

dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		$+\infty$
h(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$

1/ Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $\alpha \in]1,2[$

2/ Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \le U_n < 2$

b) Montrer par récurrence que U est croissante

c) En déduire que la suite U est convergente et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3/ On admet que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2}$

a) Montrer que $|U_{n+1}-\alpha| \le \dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) En déduire que $|U_n-\alpha| \le (\dfrac{1}{2})^n |\alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$