

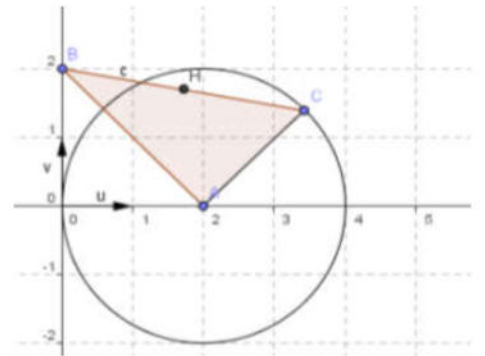
Sujet n° 1

EXERCICE 1 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit les points A et B d'affixes respectifs $z_A = 2$ et $z_B = 2i$. On désigne par \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 2.

Soit le point C du cercle \mathcal{C} d'affixe z_C tel que le triangle ABC soit rectangle en A.

Le point H étant le milieu de [BC].



- 1) a) Déterminer graphiquement $|z_C - z_A|$ et $\arg(z_C - z_A)$
b) En déduire que $z_C = 2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$
c) Donner alors la forme exponentielle de z_C .
- 2) Montrer que $z_H = (1 + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis calculer OH.
- 3) Soit le point M du plan d'affixe $z_M = 2 + 2e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi]$
 - a) Déterminer l'ensemble des points M du plan quand θ décrit $[0, \pi]$.
 - b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle $(AM) \perp (OC)$

EXERCICE 2 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A, B et C d'affixes respectifs $a = \sqrt{3} + i$, $b = i\sqrt{3} - 1$ et $c = a + b$.

- 1) a) Montrer que les points A et B appartiennent à un même cercle \mathcal{C} de centre O dont on précisera le rayon.
b) Construire alors les points A, B et C.
- 2) Ecrire chacun des complexes a et b sous forme exponentielle.
- 3) a) Montrer que OACB est un carré.
b) En déduire la forme exponentielle de c.
c) Calculer alors $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$
- 4) a) Déterminer sous la forme exponentielle les racines cinquièmes c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4 du nombre complexe c.
b) Montrer que $1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0$
c) En déduire que $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$



EXERCICE 3 :

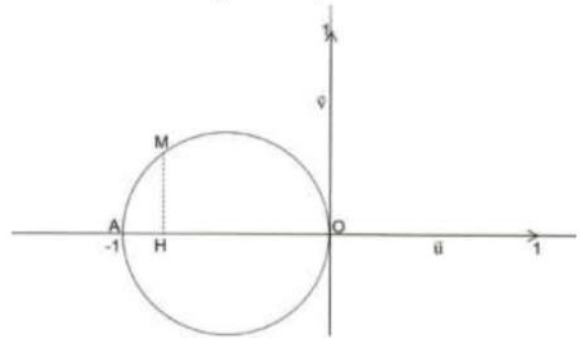
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit les points $A(1)$ et $B(-2i)$. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points $M(z)$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $|iz - 2| = |\bar{z} - 1|$ 2) $\left| \frac{z+2i}{z-1} \right| = 2$ 3) $\frac{z+2i}{z-1} < 0$ 4) $\frac{iz-2}{z-1} \in \mathbb{R}$
5) $\arg\left(\frac{z+2i}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ 6) $\bar{z} = 2i + 3e^{i2\theta}$ tel que θ décrit $[0, \pi]$

EXERCICE 4 : (Bac 2011)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

- 1) a) Montrer que (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\left(\frac{1+z}{z}\right)$ est imaginaire pur.
b) On pose $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$
c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A .
- 2) Dans la figure ci-dessous on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe (O, \vec{u}) . On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P .
- a) Montrer que $(\widehat{OM}, \widehat{ON}) \equiv (\vec{u}, \widehat{OM}) [2\pi]$ et que $(\widehat{ON}, \widehat{OP}) \equiv (\vec{u}, \widehat{OM}) [2\pi]$
b) Montrer que $OH = OM^2$
c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.



EXERCICE 5 :

- 1) θ étant un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta} \cos\theta z + e^{2i\theta} = 0$

- a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).
b) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E') :

$$i(\bar{z})^4 - 2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} \cos\theta \bar{z}^2 + e^{2i\theta} = 0$$

- 2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On donne les points A et B d'affixes respectifs 1 et $e^{2i\theta}$

- a) Déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère $OACB$ soit un parallélogramme, puis vérifier que $OACB$ est un losange.
b) Déterminer le réel θ pour que l'aire \mathcal{A} du losange $OACB$ soit égale à $\frac{1}{2}$

