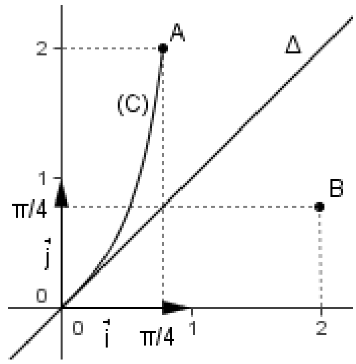
Les intégrales
Géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 :

La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = (tanx)^3 + tanx$. La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y = x$.



1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J.

   b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1}.

   c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$

3) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C) et (C') et le segment [AB].

EXERCICE 2 :

Soit F la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{tan^2x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

1) Montrer que F est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F'(x) = 2$

2) Calculer $F(\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$

3) a) Calculer alors I= $\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

   b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer J= $\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt$

EXERCICE 3 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a :
   $u_{n+2} = \frac{1}{3}\int_0^1 x^n(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx$

   b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, on a : $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}u_n$

   c) Calculer alors $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ et $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx$

EXERCICE 4 :(QCM)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule réponse est correcte. Préciser la :

1) La suite (I_n) définie sur IN par : $I_n = \int_0^n \sqrt{x}\, sin^2x.dx$ est une suite :

a) croissante　　**b)** décroissante　　**c)** stationnaire

2) Soit le réel $\boldsymbol{I = \int_{-1}^{1} x^2.sin^3x.dx}$. Alors :

a) $\boldsymbol{I} < 0$　　**b)** $\boldsymbol{I = 0}$　　**c)** $\boldsymbol{I} > 0$

3) On pose pour tout $\boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_{x}^{x^2} \boldsymbol{cos^2 t.dt}$. Alors :

a) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) < 0$ **b)** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ **c)** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) > 0$

4) Soit f une fonction continue sur $[2,3]$ telle que : $4 \leq f(x) \leq 5$ alors :

a) $\mathbf{4} \leq \int_2^3 f(x)dx \leq \mathbf{5}$ **b)** $\mathbf{2} \leq \int_2^3 f(x)dx \leq \mathbf{3}$ **c)** $\mathbf{0} \leq \int_2^3 f(x)dx \leq \mathbf{1}$

5) Soit C= $\left\{M(x,y)\ ;\ y = \frac{tanx}{cosx} \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Alors le volume $\mathcal{V}$ de S est égal à :

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{6}$

EXERCICE 5 :

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A $(-5,0,0)$ et les plans (P) : $2x - y + 4z - 11 = 0$ et (Q) : $x - 2y - z - 1 = 0$.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

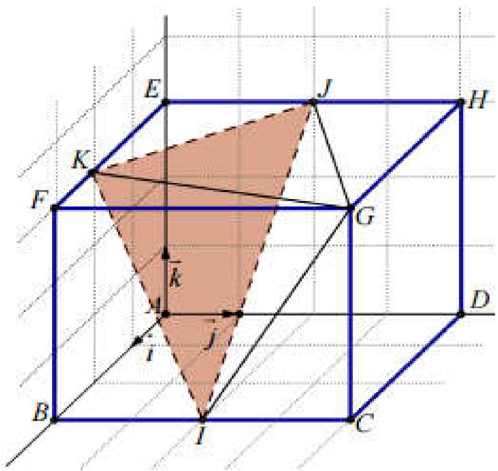
b) Donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection D.

2) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de O sur la droite D.

3) a) Déterminer l'équation réduite de la sphère (S) de centre A et tangent au plan (P).

b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on caractérisera.

EXERCICE 6 :



L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(A\ , \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère le parallélépipède ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$Soit les points I et J les milieux respectifs des arrêtes [BC] et [EH]. Soit K le point définit par $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{GF} \wedge \overrightarrow{GE}$

2) Déterminer les coordonnées des points de la figure.

3) a) Calculer l'aire du triangle IJK.

b) Calculer le volume du tétraèdre IJKG.

c) En déduire la distance de G au plan (IJK).

4) Ecrire une équation cartésienne du plan (IJK).

5) a) Déterminer un système d'équations paramétrique de la droite Δ perpendiculaire au plan (IJK) et passant par le point G.

b) Déterminer les coordonnées du point L intersection de Δ et (IJK).

EXERCICE 7 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O\ , \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère le plan P_m : $2x - y + 2z + m = 0$; (m étant un paramètre réel).

Soit l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$

1) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le rayon et le centre Ω.

2) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m la position relative de (S) et le plan P_m

3) a) Caractériser l'intersection de la sphère (S) et le plan P_3.

b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans Q et Q' tangents à (S) et parallèles au plan P_3.

EXERCICE 8 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On donne les points $A(-2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $C(-1,1,1)$ et $\Omega(-1,2,2)$.

1) Soit l'ensemble P des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$
   a) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à P.
   b) Montrer que P est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
2) Calculer $\overrightarrow{A\Omega}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$. En déduire que $\Omega\notin P$.
3) Montrer que le point Ω appartient à l'axe du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
4) Soit S la sphère de centre Ω(-1,2,2) et de rayon $R=\sqrt{2}$.
   a) Ecrire une équation cartésienne de S.
   b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle $\mathcal{C}$.
   c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 9 :

On pose pour tout $n\in IN^*$, $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$

1) a) Vérifier que $I_2=\frac{8}{15}$
   b) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in IN^*$, on a :
   $I_{n+1}=(2n+2)\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,dx$
   c) En déduire que pour tout $n\in IN^*$, on a : $I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}I_n$
2) On considère les deux fonctions F et G définies sur IR par :
   $F_n(x)=\int_0^{sinx}(1-t^2)^n dt$ et $G_n(x)=\int_0^x(cost)^{2n+1}\,dt$
   a) Montrer que f et g sont dérivables sur IR et calculer $F_n'(x)$ et $G_n'(x)$ pour tout $x\in IR$
   b) En déduire que pour tout réel x, on a : $F_n(x)=G_n(x)$
   c) En déduire la valeur de l'intégrale $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cost)^7\,dt$

EXERCICE 10 :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

On pose pour tout entier $n>0$, $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f(k)$ et $I_n=\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,dx$

1) a) Vérifier que f est décroissante.
   b) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2) Montrer que pour tout entier $n\geq 0$, $\frac{1}{1+n^2}\leq I_n\leq 1$
3) a) Montrer que pour tout entier $k\geq 0$, $f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(t)\,dx\leq f(k)$
   b) Montrer alors que pour tout entier $n>0$, $S_n-1\leq I_n\leq S_n-\frac{1}{1+n^2}$
   c) En déduire que pour tout entier $n>0$, on a : $\frac{n+1}{n(1+n^2)}\leq S_n\leq 2$
   d) Dire alors pourquoi (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite L.