Sujet n°3

EXERCICE 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{e^x-1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) En déduire que $e^x-1\le\sqrt{e^x-1}$, si et seulement si, $x\le\ln(2)$.

3) Montrer que le point $B(\ln 2\ ,\ 1)$ est un point d'inflexion de (C_f).

4) **Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe**, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x:\mapsto e^x-1$.

a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe (C_f).

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan(x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)(0)$ et $\left(g^{-1}\right)(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

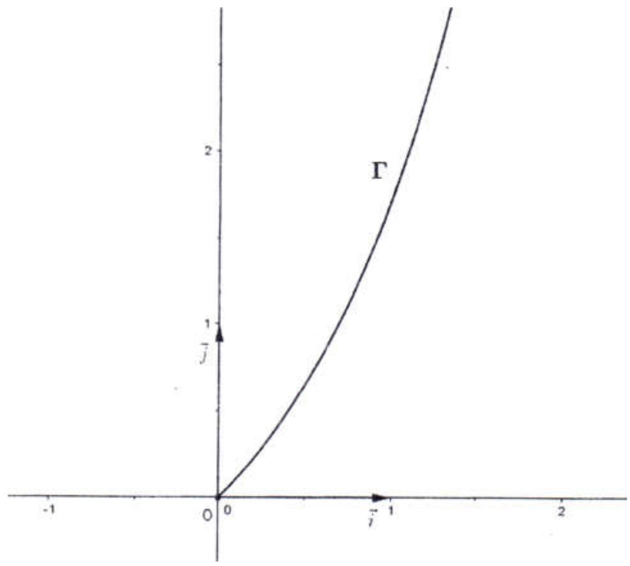
d) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g^{-1}(x)}{x}=1$.

6) On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x)=2\left(f(x)-\left(g^{-1}\circ f\right)(x)\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F'(x)=G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x)=G(x)$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la courbe Γ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$. Montrer que $A=1+\ln 2-\frac{\pi}{2}$.



EXERCICE 2 :

En donne les nombres complexes $a=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $b=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $c=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

1) Vérifier que $a^2+b^2=0$ et que $\bar{c}.(a+b)=2$

2) On donne dans C l'équation $(E): z^2-cz+\frac{c^2}{2}=0$

a- Montrer que le nombre complexe a est une solution de (E)

b- Déduire la deuxième solution de (E). (On pourra l'écrire sous forme exponentielle)

c- Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{3}}\left(i+e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)=i$ puis déduire que $c=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(a^2-i\right)+i$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, on donne les points I, A et C d'affixes respectives i , a^2 et c

a- Construire les points I et A. (On prendra 3cm comme unité graphique)

b- Montrer que IAC est un triangle équilatéral direct

c- Déduire une construction de C

EXERCICE 3 :

l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On donne les points $A(0,0,2)$ $B(-1,2,1)$, $C(2,-1,1)$et $D(0,1,-1)$.

1) a-Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
   b- En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x+y+z-2=0$
2) a- Vérifier que $I(1,1,0)$ est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle ABC
   b- Donner une représentation paramétrique de l'axe Δ du cercle ζ
   c- Soit Q le plan médiateur du segment $[AD]$. Vérifier que $Q\cap\Delta=\{\Omega(2,2,1)\}$
3) Soit S la sphère de centre Ω et passant par A
   Ecrire une équation cartésienne de S
4) On désigne par R le plan d'équation $z-2=0$ et par ζ' l'ensemble des points $M_\theta(2+2\sqrt{2}cos\theta\ ,\ 2+2\sqrt{2}sin\theta\ ,2)$ où $\theta\in[0,2\pi[$
   a- Vérifier que $A\in\zeta'$
   b- Montrer que $\zeta'\subset S\cap R$
   c- Montrer que si θ décrit l'intervalle $[0,2\pi[$ alors M_θ varie sur un cercle que l'on précisera.
   d- Vérifier que S est la sphère circonscrit au tétraèdre OAKM_θ
   e- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le volume du tétraèdre OAKM_θ est maximal.

EXERCICE 4 :

I) Soit f : [0,+∞[→ IR qui à $x\mapsto\dfrac{Ln\,x}{x-Ln\,x}$ ***si x > 0 et f(0) = -1***

1°/ Soit $g\ :\ IR_-^* \to IR$ ***qui à*** $x\mapsto x - Ln\,x$

Etudier les variation de g ***et en déduire que f est définie su r*** IR_+

2°/ a) Montrer que f est continue sur IR_+ ***b) Montrer que f est dérivable sur*** IR_+

3°/ Dresser le tableau de variation de f sur IR_+

4°/ Construire la courbe ζ ***de f dans un repère orthonormé*** $(O,\vec{i},\vec{j})$

II) Soit F la primitive de f sur [1,+∞[qui s'annule en 1 (on ne cherchera pas à déterminer F(x))

1°/ Montrer que pour tout $x \geq 1$: $f(x) \geq \frac{Ln\,x}{x}$

2°/ En déduire que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \geq \frac{1}{2}(Ln\,x)^2$

3°/ Dresser le tableau de variation de F.

4°/ Soit U la suite réelle définie sur IN^* par : $U_n = F(n+1) - F(n)$

a) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$ (on pourra utiliser le T.A.F)

b) Montrer alors que la suite U est convergente et préciser sa limite.

c) On pose, pour tout $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} U_k$ Exprimer S_n à l'aide de F puis déduire la limite de S_n en $+\infty$.

EXERCICE 5 :

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur [0,1] par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1°/ Etudier les variations de f_n

2°/ Montrer que pour tout entier naturel non nul n.

l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution U_n et que $U_n \in\ ]0,1[$

On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$, une suite (U_n)

3°/ a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle]0,1[. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(U_{n+1}) < 0$

c) Montrer que la suite (U_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

4°/ a) Montrer que pour $n \geq 1$, $Ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$

b) Calculer la limite de la suite U_n