Sujet n°4

EXERCICE 1 : (Bac principale 2017)

Si une femme enceinte porte un seul fœtus, on dit qu'elle a une grossesse **unique** sinon on dit qu'elle a une grossesse **multiple**.

Dans une ville, une étude faite sur une population de femmes enceintes montre que

- le pourcentage des femmes ayant une grossesse multiple est de 5%,
- parmi les femmes ayant une grossesse multiple, 55% finissent par accoucher dans le délai prévu,
- parmi les femmes ayant une grossesse unique, 92 % finissent par accoucher dans le délai prévu.

On choisit au hasard une femme de cette population.

On désigne par U et D les évènements suivants :

U : « la femme a une grossesse unique ».

D : « la femme accouche dans le délai prévu ».

1) a) Déterminer $p(U)$

b) En utilisant les évènements U et D, traduire en terme de probabilités les pourcentages 92 % et 55 %.

2) a) Calculer $p(D)$.

b) Une femme a accouché dans le délai prévu, montrer que la probabilité que sa grossesse soit unique est égale à 0,9694.

3) Le service de maternité de cette ville prévoit qu'en Juillet 2017, n femmes enceintes devraient accoucher dans le délai prévu, ($n \geq 2$).

On note p_n la probabilité qu'au moins une de ces femmes ait une grossesse multiple.

a) Exprimer p_n en fonction de n.

b) Quel est le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 dans le délai prévu pour que la probabilité p_n soit supérieure à 0,9 ?

EXERCICE 2 : (Bac 2016)

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

1) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres, tente de choisir un microscope fonctionnel ; il réalise l'épreuve suivante :

Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité.

- Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.
- Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.

Soit A_n l'évènement : « Le premier microscope non défectueux est obtenu au $n^{\text{ième}}$ choix »

et p_n sa probabilité.

a) Justifier que $n \leq 4$.

b) Calculer p_1 et p_2.

c) Montrer que $p_3 = \frac{7}{120}$ et que $p_4 = \frac{1}{120}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

a) Soit T un réel positif, on note $p(Y \leq T)$ la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à T années. Exprimer $p(Y \leq T)$ en fonction de λ et T.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ si l'on sait que $p(Y \geq 5) = 0,7$.

c) On prend $\lambda = 0,071$.
Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

EXERCICE 3 : (Bac 2016)

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de (C) d'abscisse $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et d'ordonnée positive.

On note a l'affixe du point A.

1) Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.

a) Donner, en fonction de θ, l'écriture exponentielle des nombres complexes a, $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$.

b) Construire sur l'annexe les points B, C et D d'affixes respectives $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$.

2) a) Justifier que $a + \bar{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) Montrer que a et $\bar{a}$ sont les solutions de l'équation $(E) : z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 = 0$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z,

$$z^5 - 1 = (z-1)\left[z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1\right]\left[z^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)z + 1\right].$$

b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.

b) Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.

c) En déduire que $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

5) Soit I le point d'affixe 1.
Montrer que les points I, A, C, D et B sont les sommets d'un pentagone régulier.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J).

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Tracer la courbe (C).

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) définie sur un intervalle J qu'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J. Calculer $(f^{-1})'(1)$

c) Tracer dans le même repère la courbe (C') de f^{-1}

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$J.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$ et voici ci-contre son tableau de variation sur $[0,1]$ et (a_n) une suite réelle définie sur IN par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$

1) Montrer que $f(x) \le x$ pour tout $x \ge 0$.

2) a) Montrer que pour tout n $\in$IN, on a : $0 < a_n \le 1$

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

3) Pour tout $n \in IN$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

a) Calculer : u_0 et v_0

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L.

c) Montrer que $2-\sqrt{2} \le$ L ≤ 1