Prof : Oueslati Aymen	série d'exercices corrigés	BAC SC & math & technique & ECO &i nfo
	« Logarithme-exponentielle-intégrale »	
Tél 27677722		***Facebook : www.facebook.com/MathTewa***

Fonction logarithme népérien Révision Bac 2018 .Il faut effectuer beaucoup d'effort bon courage Mr Oueslati Aymen ☺

Exercice 1 ☺ ☺

1°) Résoudre dans IR les équations suivantes:

$$\mathrm{Log}(x+1)+\mathrm{Log}(x+2)=\mathrm{Log}(1-x)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Log}(2-x)=\mathrm{Log}(x+2)$$

$$\mathrm{Log}(x+2)=\mathrm{Log}(-x+9)-\mathrm{Log}(x+3)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Log}|x+1|=\mathrm{Log}|x-2|$$

$$(\mathrm{Log}x)^2+2\mathrm{Log}x-3=0$$

$$(\mathrm{Log}x)^2-\frac{21}{(\mathrm{Log}x)^2}=4$$

$$(\mathrm{Log}x)^2+\frac{16}{(\mathrm{Log}x)^2}=10$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les sytémes suivants: $\begin{cases}x+y=3\\ \mathrm{Log}(\frac{x\cdot y}{2})=0\end{cases}$;

$\begin{cases}x+y=30\\ \mathrm{Log}x=3\mathrm{Log}6-\mathrm{Log}y\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+y^2=10\\ \mathrm{Log}x+\mathrm{Log}y=\mathrm{Log}3\end{cases}$

3°) Résoudre dans IR les inéquations:

$$\mathrm{Log}(2-x)+\mathrm{Log}2<\mathrm{Log}(x+1)$$

$$\mathrm{Log}(x^2-x)>\mathrm{Log}(3x-4)$$

$$\mathrm{Log}x-3\le\frac{4}{\mathrm{Log}x}$$

Exercice 2 ☺☺

Calculer les limites suivantes:

•) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\text{Log}x)$ •) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\,\text{Log}x$ •) $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\,\text{Log}x$

•) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\,\text{Log}x$ •) $\lim\limits_{x\to0^+}x(\text{Log}x)^2$ •) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\text{Log}x$

•) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{Log}(x+1)}{x}$ •) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\text{Log}(x+1)}{x}$ •) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\text{Log}x-x$

•) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\text{Log}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ •) $\lim\limits_{x\to0^+}x\,\text{Log}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ •) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\text{Log}x-1}{x-e}$

Exercice 3 ☺

Soit la fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=4-\frac{1}{4}\text{Log}x$

1°) a) Etudier les variations de f

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique β et que $\beta\in]3,4[$

2°) On définit la suite U par: $\begin{cases}U_0=3\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrer que $f([3;4])\subset[3;4]$

b) Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N};\ U_n\in[3;4]$

c) Montrer que: $\forall x\in[3;4]$ on a $|f'(x)|\leq\frac{1}{12}$

d) Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}$ on a: $|f(U_n)-f(\beta)|\leq\frac{1}{12}|U_n-\beta|$

En déduire que: $\forall n\in\mathbb{N}\ |U_n-\beta|\leq\frac{1}{12^n}|U_0-\beta|$

e) Montrer que la suite (U_n) est convergente, quelle est sa limite?

f) En remarquant que $|U_0-\beta|<1$, montrer que U_3 est une valeur approchée de β à 10^{-3} près. Calculer U_3.

Fonction exponentielle *Révision Bac 2018 .Il faut effectuer beaucoup d'effort bon courage*

Mr Oueslati Aymen ☺

Exercice 4 ☺☺

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$e^{2x} - 3e^{x} + 2 > 0$; $\dfrac{1}{e^{x}-3} < 1$; $\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}-2}$;

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$; $e^{3x} - 5e^{2x} - 6e^{x} = 0$

Exercice 5☺☺

1°) •) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{x} - x)$ •) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{2}}$ •

•) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}-3}{e^{x}+2x}$ •) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \dfrac{e^{x}}{e^{x}-2}\right)$

2°) •) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} + 2x$ •) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{3}e^{-x}$ •

3°) •) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}$ •) $\lim\limits_{x \to 0^{+}} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

•) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}$ •) $\lim\limits_{x \to 0^{-}} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{3x} - 2e^{x})$

•) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}-x}{2x^{2}}$

Exercice 6 ☺

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

Montrer que f est impaire.

Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère.

Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 7 ☺

1)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(1-x)e^{-x}+1$

Etudier g et construire sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

2)

Soit f la fonction définie par $f(x)=1+x(e^{-x}+1)$

a) Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe. Etudier les variations de f.

b) Montrer que C_f admet un point d'inflexion A.
   Déterminer une équation de la tangente T en A.

c) Etudier la position de C_f par rapport à son asymptote oblique.

d) Construire C_f.

Exercice 8 ☺ ☹

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+\dfrac{1}{e^{x}+1}$

a) Montrer que le point $A(0;\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C) de f et écrire l'équation de la tangente à (C) en ce point.

b) Etudier les variations de f et construire sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de sa fonction réciproque dans le même repère.

Intégrale. *Révision Bac 2018 .Il faut effectuer beaucoup d'effort bon courage Mr Oueslati Aymen ☺*

Exercice 9 ☺ ☹

On considère la suite (I_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$

1°) Calculer I_1.

2°) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

3°) Grace à un encadrement de $\sqrt{1+t}$, établir que: $\dfrac{1}{n+1} \le I_n \le \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$

4°) Montrer que pour tout point t de [0,1]; $0 \le \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \le \dfrac{1}{2}(1-t)$.

En déduire que $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - \dfrac{1}{2n^2} \le I_n \le \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$ et déterminer la limite de $(n\, I_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 10 ☹ ☹

Soit la fonction numérique à variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\mathrm{Log}(1-x) & \text{si } x<1 \\ f(x) = (x-1)e^x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

1°) a) Montrer que f est continue au point $x_0 = 1$.

b) Etudier la dérivabilité à gauche et la dérivabilité à droite en $x_0 = 1$.

Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer la courbe (C) représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [1,+\infty[$ par $g(x) = (x-1)e^x$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Tracer la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même repère que (C) (g^{-1} étant la fonction réciproque de g).

4°) Soit α l'abscisse du point d'intersection des courbes (C) et (Γ). (On ne cherchera pas à déterminer α).

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équation $y = 0$, $x = 1$ et $x = \alpha$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^\alpha g^{-1}(x)\,dx$ en fonction de α.

Correction ☺

EX 1 ☺

1)

$$\text{Log}(x+1)+\text{Log}(x+2)=\text{Log}(1-x).$$

L'équation est définie ssi $\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \\ 1-x>0 \end{cases}$ signifie $x \in]-1;1[$

et par suite $\begin{cases} \text{Log}[(x+1)(x+2)]=\text{Log}(1-x) \\ x \in]-1;1[\end{cases}$

signifie $\begin{cases} x^2+3x+2=1-x \\ x \in]-1;1[\end{cases}$ signifie $\begin{cases} x^2+4x+1=0 \\ x \in]-1;1[\end{cases}$

signifie $x=-2+\sqrt{3}$

•) $\frac{1}{2}\text{Log}(2-x)=\text{Log}(x+2).$

L'équation est définie ssi $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2+x>0 \end{cases}$ ce qui signifie $x \in]-2;2[$

et par suite $\begin{cases} 2-x=(x+2)^2 \\ x \in]-2,2[\end{cases}$ signifie $\begin{cases} x^2+5x+2=0 \\ x \in]-2;2[\end{cases}$

signifie $x=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$

•) $\operatorname{Log}(x+2)=\operatorname{Log}(-x+9)-\operatorname{Log}(x+3)$

L'équation est définie ssi $\begin{cases} x+2>0 \\ -x+9>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ ce qui signifie $x \in]-2;9[$

et par suite $\begin{cases} x+2=\dfrac{-x+9}{x+3} \\ x \in]-2;9[\end{cases}$ signifie $\begin{cases} x^2+5x+6=-x+9 \\ x \in]-2;9[\end{cases}$

signifie $\begin{cases} x^2+6x-3=0 \\ x \in]-2;9[\end{cases}$ signifie $x=-3+2\sqrt{3}$

•) $\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}|x+1|=\operatorname{Log}|x-2|$

L'équation est définie ssi $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$ ce qui signifie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$

et par suite $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\operatorname{Log}|x+1|=\operatorname{Log}|x-2| \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\} \end{cases}$ signifie $\begin{cases} |x-2|^2=|x+1| \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\} \end{cases}$

signifie $\begin{cases} x^2-4x+4=x+1 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2-4x+4=-x-1 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\} \end{cases}$

signifie $\begin{cases} x^2-5x+3=0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2-3x+5=0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;2\} \end{cases}$ (impossible)

signifie $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ ou $x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

•) $(\operatorname{Log}x)^2+2\operatorname{Log}x-3=0$.

On pose $\operatorname{Log}x=X$ ce qui signifie $x=e^X$ ($x>0$ et $X \in \mathbb{R}$)

et par suite $X^2+2X-3=0$ signifie $X=1$ ou $X=-3$; ce qui donne

$x=e$ ou $x=e^{-3}$

•) $(\operatorname{Log}x)^2-\dfrac{21}{(\operatorname{Log}x)^2}=4$ signifie $(\operatorname{Log}x)^4-4(\operatorname{Log}x)^2-21=0$

On pose $\operatorname{Log}x=X$ ce qui signifie $x=e^X$ avec $x>0$ et $x \neq 1$

et par suite $X^4-4X^2-21=0$. Si on pose $U=X^2$. on trouve

•) $\frac{1}{2}\text{Log}(2-x)=\text{Log}(x+2).$

L'équation est définie ssi $\begin{cases}2-x>0\\2+x>0\end{cases}$ ce qui signifie $x\in\left]-2;2\right[$

et par suite $\begin{cases}2-x=(x+2)^2\\ x\in\left]-2,2\right[\end{cases}$ signifie $\begin{cases}x^2+5x+2=0\\x\in\left]-2;2\right[\end{cases}$

signifie $x=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$

•) $\text{Log}(x+2)=\text{Log}(-x+9)-\text{Log}(x+3)$

L'équation est définie ssi $\begin{cases}x+2>0\\-x+9>0\\x+3>0\end{cases}$ ce qui signifie $x\in\left]-2;9\right[$

et par suite $\begin{cases}x+2=\dfrac{-x+9}{x+3}\\x\in\left]-2;9\right[\end{cases}$ signifie $\begin{cases}x^2+5x+6=-x+9\\x\in\left]-2;9\right[\end{cases}$

signifie $\begin{cases}x^2+6x-3=0\\x\in\left]-2;9\right[\end{cases}$ signifie $x=-3+2\sqrt{3}$

•) $\frac{1}{2}\text{Log}|x+1|=\text{Log}|x-2|$

L'équation est définie ssi $\begin{cases}x\neq-1\\x\neq2\end{cases}$ ce qui signifie $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$

et par suite $\begin{cases}\frac{1}{2}\text{Log}|x+1|=\text{Log}|x-2|\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}\end{cases}$ signifie $\begin{cases}|x-2|^2=|x+1|\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}\end{cases}$

signifie $\begin{cases}x^2-4x+4=x+1\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}\end{cases}$ ou $\begin{cases}x^2-4x+4=-x-1\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}\end{cases}$

signifie $\begin{cases}x^2-5x+3=0\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}\end{cases}$ ou $\begin{cases}x^2-3x+5=0\\x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}\end{cases}$ (impossible)

signifie $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ ou $x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

•) $(\text{Log}x)^2+2\text{Log}x-3=0$.

On pose $\text{Log}x=X$ ce qui signifie $x=e^X$ ($x>0$ et $X\in\mathbb{R}$)

et par suite $X^2+2X-3=0$ signifie $X=1$ ou $X=-3$; ce qui donn

$x=e$ ou $x=e^{-3}$

•) $(\text{Log}x)^2-\dfrac{21}{(\text{Log}x)^2}=4$ signifie $(\text{Log}x)^4-4(\text{Log}x)^2-21=0$

$U^2-4U-21=0$ signifie $U=7$ ou $U=-3$.

$U=7$ signifie $X^2=7$ signifie $X=\sqrt{7}$ ou $X=-\sqrt{7}$

signifie $\text{Log}x=\sqrt{7}$ ou $\text{Log}x=-\sqrt{7}$ signifie $x=e^{\sqrt{7}}$ ou $x=e^{-\sqrt{7}}$

$U=-3$ ne convient pas.

$(\text{Log}x)^2+\dfrac{16}{(\text{Log}x)^2}=10$ signifie $(\text{Log}x)^4-10(\text{Log}x)^2+16=0$

On pose $\text{Log}x=X$ ce qui signifie $x=e^X$ avec $x>0$ et $x\neq1$

et par suite $X^4-10X^2+16=0$. Si on pose $X^2=U$, on trouve

$U^2-10U+16=0$ signifie $U=8$ ou $U=2$

$U=X^2=8 \Leftrightarrow X=2\sqrt{2}$ ou $X=-2\sqrt{2}$ et par suite $x=e^{2\sqrt{2}}$ ou $x=e^{-2\sqrt{2}}$

$U=X^2=2 \Leftrightarrow X=\sqrt{2}$ ou $X=-\sqrt{2}$ et par suite $x=e^{\sqrt{2}}$ ou $x=e^{-\sqrt{2}}$

L'ensemble des solutions de l'équation est alors $\left\{e^{2\sqrt{2}};e^{-2\sqrt{2}};e^{\sqrt{2}};e^{-\sqrt{2}}\right\}$

2)

$$\begin{cases}x+y=3\\ \text{Log}(\frac{x\cdot y}{2})=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3\\ \frac{x\cdot y}{2}=1\\ x\cdot y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3\\ x\cdot y=2\\ x\cdot y>0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)\in\{(1,2);(2,1)\}$$

$$\begin{cases}x+y=30\\ \text{Log}x=3\text{Log}6-\text{Log}y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=30\\ \text{Log}x+\text{Log}y=3\text{Log}6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=30\\ x\cdot y=216\\ x>0\\ y>0\end{cases}$$

signifie $(x,y)\in\{(12,18);(18,12)\}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ \text{Log}x+\text{Log}y=\text{Log}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x\cdot y=3 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=16 \\ x\cdot y=3 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

signifie $\begin{cases} x+y=4 \\ x\cdot y=3 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=-4 \\ x\cdot y=3 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ (impossible)

signifie $(x,y)\in\{(1,3);(3,1)\}$

3) A faire ☺

EX 2 ☺

•) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\text{Log}x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\dfrac{\text{Log}x}{x})=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{Log}x}{x}=0$

•) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\,\text{Log}x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Log}x=+\infty$

•) $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\,\text{Log}x=\lim\limits_{x\to0^+}x(x\,\text{Log}x)=0$ car $\lim\limits_{x\to0^+}(x\,\text{Log}x)=0$

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\,\text{Log}x=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\,\text{Log}[(\sqrt{x})^2]=\lim_{x\to0^+}[2\sqrt{x}\,\text{Log}\sqrt{x}\,]$$

$$=\lim_{t\to0^+}2t\,\text{Log}t=0 \text{ où } t=\sqrt{x}.$$

Conclusion: $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\,\text{Log}x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\text{Log}x)^2 = \lim_{x\to 0^+} [\sqrt{x}\,\text{Log}x]^2 = 0 \text{ (voir résultat précédent)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x} - \text{Log}x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\,[1 - \frac{\text{Log}x}{\sqrt{x}}] = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\,[1 - \frac{2\text{Log}\sqrt{\;}}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{t\to +\infty} t\,[1 - \frac{2\text{Log}t}{t}] = +\infty \text{ où } t = \sqrt{x}$$

Conclusion: $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x} - \text{Log}x) = +\infty.$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\text{Log}(x+1)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\text{Log}[x(1+\frac{1}{x})]}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\text{Log}x}{x} + \frac{\text{Log}(1+\frac{1}{x})}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to (-1)^+} \frac{\text{Log}(x+1)}{x} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to (-1)^+} \text{Log}(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} (x\text{Log}x - x) = \lim_{x\to +\infty} x(\text{Log}x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\text{Log}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to +\infty} x\text{Log}(1+\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\text{Log}(1+t)}{t} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\text{Log}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0^+} [x\text{Log}(x+1) - x\text{Log}x)] = 0$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\text{Log}x - 1}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{\text{Log}x - \text{Log}e}{x - e} = \text{Log}'e = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\text{Log}x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\text{Log}(\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3\text{Log}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{3\,\text{Log}t}{t} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\text{Log}\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{\text{Log}x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^r\text{Log}x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{r}x^r\,\text{Log}x^r = \lim_{t\to 0^+} (\frac{1}{r}\,t\,\text{Log}t) = 0.$$

Ex 3 😉

$f(x) = 4 - \frac{1}{4}\text{Log}x \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*$

1°) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{1}{4x} < 0$

d'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par: $\varphi(x) = f(x) - x$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$. D'où φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (f(x) - x) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{4}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{Log}x}{x}\right] = 0$

x	0		β		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\Vert$		$-$		
$\varphi(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

φ est définie, continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et $\varphi(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ d'où φ est une une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$; $0 \in \mathbb{R}$

il existe alors un unique $\beta \in]0;+\infty[$ vérifiant

$\varphi(\beta) = f(\beta) - \beta = 0$ or $\varphi(3) = 1 - \frac{1}{4}\text{Log}3 > 0$ et $\varphi(4) = -\frac{1}{4}\text{Log}4 < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\beta \in]3;4[$ $(\varphi(3) \times \varphi(4) < 0)$

Conclusion: l'équation f(x) = x admet une seule solution $\beta \in]3;4[$.

2°) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout n de } \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrons que $f([3;4]) \subset [3;4]$.

En effet, $\begin{cases} 3 \le x \le 4 \\ \text{f décroissante} \\ \text{et continue} \end{cases} \Rightarrow f(4) \le f(x) \le f(3)$

Or $f(4) = 4 - \frac{1}{4}\text{Log}4 \ge 3$ et $f(3) = 3 - \frac{1}{4}\text{Log}3 \le 4$

D'où pour tout x de $[3;4]$; $3 \le f(4) \le f(x) \le f(3) \le 4$,

ce qui prouve que $f([3;4]) \subset [3;4]$

b) Montrons par récurrence que $U_n \in [3;4]$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On a $U_0 = 3 \in [3;4]$.

On suppose pour n de $\mathbb{N}$, $U_n \in [3;4]$ et montrons que $U_{n+1} \in [3;4]$

D'après a) si $U_n \in [3;4]$, $f(U_n) = U_{n+1} \in [3;4]$ car $f([3;4]) \subset [3;4]$

Conclusion: $U_n \in [3;4]$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) Pour tout x de $[3;4]$, $f'(x) = -\frac{1}{4x}$ et $|f'(x)| = \frac{1}{4x}$. Or

$\begin{cases} 3 \le x \le 4 \\ \frac{1}{4} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} \le \frac{1}{4x} \le \frac{1}{12} \end{cases}$ ce qui prouve que $|f'(x)| \le \frac{1}{12}$ pour tout x de $[3;4]$

d) f est définie continue dérivable sur $[3;4]$ et pour tout x de $[3;4]$

$|f'(x)| \le \frac{1}{12}$; $\beta \in]3,4[$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \in [3;4]$.

D'après le corollaire du théorème de l'inégalité des accroissements finis on obtient:

$|f(U_n) - f(\beta)| \le \frac{1}{12}|U_n - \beta|$; $\begin{cases} f(\beta) = \beta \\ f(U_n) = U_{n+1} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On trouve $|U_{n+1} - \beta| \le \frac{1}{12}|U_n - \beta|$ et puisque $U_0 = 3 \ne \beta$ alors on démontre par récurrence que $U_n \ne \beta$ pour tout n d'où pour tout n de $\mathbb{N}$, $0<|U_{n+1}-\beta|\leq\frac{1}{12}|U_n-\beta|$

Pour le rang 1 $\quad 0<|U_1-\beta|\leq\frac{1}{12}|U_0-\beta|$

Pour le rang 2 $\quad 0<|U_2-\beta|\leq\frac{1}{12}|U_1-\beta|$

$\vdots$

Pour le rang $n-1$ $\quad 0<|U_n-\beta|\leq\frac{1}{12}|U_{n-1}-\beta|$

En effectuant le produit de ces n inégalités membre par membre (tous les membres sont strictement positifs) et après simplification on obtient $\quad 0<|U_n-\beta|\leq\frac{1}{12^n}|U_0-\beta|$

e) On a: $\frac{1}{12}\in]-1;1[$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{12^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n=0$

La suite de terme général $|U_n-\beta|$ est encadrée par deux suites convergentes pour tout $n\in\mathbb{N}$ et qui ont la même limite 0 d'où elle est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}|U_n-\beta|=0$ signifie $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\beta$.

Conclusion: $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est β.

i) $|U_0-\beta|=|3-\beta|$ avec

$$3<\beta<4$$
$$-4<-\beta<-3$$
$$-1<3-\beta<0$$

ce qui prouve que $|3-\beta|<1$ et par conséquent $|U_0-\beta|<1$ et on obtient pour tout n de $\mathbb{N}$, $0<|U_n-\beta|\leq\frac{1}{12^n}|U_0-\beta|<\frac{1}{12^n}$.

D'où pour tout n de $\mathbb{N}$ $|U_n-\beta|\leq\frac{1}{12^n}$

Ex 4 ☺

•) $e^{2x}+e^{x}-2=0$ On pose $t=e^{x}$

L'équation dévient $t^2+t-2=0$

d'où $t=1$ ou $t=-2$

comme $t>0$ alors $t=1$.

Par suite $x=\text{Log}\,1=0$.

Conclusion: $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$.

•) $e^{3x}-5e^{2x}-6e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}(e^{2x}-5e^{x}-6)=0$

$\Leftrightarrow e^{2x}-5e^{x}-6=0$

$\Leftrightarrow e^{x}=-1$ ou $e^{x}=6$

or $e^{x}>0$ alors $e^{x}=6$ d'où $x=\text{Log}\,6$

Conclusion: $S_{\mathbb{R}}=\{\text{Log}\,6\}$.

•) $e^{3x+1}+e^{2x+1}=6e^{x+1} \Leftrightarrow e^{3x+1}+e^{2x+1}-6e^{x+1}=0$

$\Leftrightarrow e^{x+1}(e^{2x}+e^{x}-6)=0$

$\Leftrightarrow e^{2x}+e^{x}-6=0$

On pose $t=e^{x}$

L'équation devient: $t^2+t-6=0$

alors $t=2$ ou $t=-3$

comme $t>0$ alors $t=2$ d'où $x=\text{Log}\,2$

Conclusion: $S_{\mathbb{R}}=\{\text{Log}\,2\}$.

Ex 5 ☺

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x}\right]^2$

On pose $t=\dfrac{x}{2}$ quand $x\to+\infty$, $t\to+\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\dfrac{e^{t}}{2t}\right]^2=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{e^{t}}{t}\right]^2=+\infty$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\dfrac{e^{t}}{t}\right]=+\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} (e^{3x} - 2e^{x}) = \lim_{x \to +\infty} e^{x}(e^{2x} - 2) = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}-3}{e^{x}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}(1-\frac{3}{e^{x}})}{e^{x}(1+2\cdot\frac{x}{e^{x}})} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1-\frac{3}{e^{x}}}{1+2\cdot\frac{x}{e^{x}}} = 1$

  car $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3}{e^{x}} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} \left[x - \dfrac{e^{x}}{e^{x}-2}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \dfrac{1}{1-\frac{2}{e^{x}}}\right] = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}-x}{2x^{2}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{x}}{x^{2}} - \dfrac{1}{2x} = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{2}} = +\infty$

  (voir le 2ème exemple).

- $\lim_{x \to +\infty} 2xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} (2\cdot\dfrac{x}{e^{x}}) = 0.$

Ex 6 ☺

$x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

1°) Pour tout x de $\mathbb{R}$ $(-x) \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1-e^{x}}{e^{x}}}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}} = -\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = -f(x)$$

d'où f est impaire.

La courbe (C) de f admet l'origine O centre de symétrie.

2°) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{e^{x}(e^{x}+1) - e^{x}(e^{x}-1)}{(e^{x}+1)^{2}} = \frac{2e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}} > 0$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1;\ x > 0 \quad f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ d'où

$\Delta : y = -1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$

et $\Delta' : y = 1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$

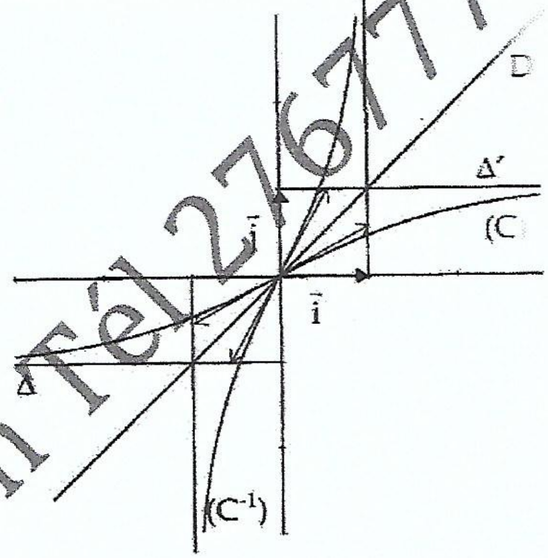
$f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

3°) f est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$J = f(\mathbb{R}) =]-1;1[$

d'où f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. f^{-1} la récipr oque de f existe, f^{-1} estdéfinie, continue et strictement croissante sur $]-1;1[$

x	-1		1
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



4°) (C^{-1}) la courbe de f^{-1} est l' image de (C) par la symétrie d ' axe D: $y = x$

5°) Pour tout x de $]-1;1[$ $f^{-1}(x) = y \in \mathbb{R}$ signifie $f(y) = x$ signifie

$\dfrac{e^y - 1}{e^y + 1} = x$ signifie $xe^y + x = e^y - 1$ signifie $e^y(1-x) = 1+x$ signifie

$e^y = \dfrac{1+x}{1-x}$ signifie $y = \text{Log}\dfrac{1+x}{1-x}$

$$f^{-1} :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \text{Log}\frac{1+x}{1-x}$$

Ex 7 ☺

$g(x) = (1-x)e^{-x} + 1$

1°) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$g'(x) = -(1-x)e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$

$g(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1 = (1-x)e^{-x} + 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-xe^{-x}) = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$g(2) = -e^{-2} + 1 = \dfrac{-1}{e^2} + 1 = \dfrac{e^2-1}{e^2}$

$\Delta : y = 1$ est une asymptote horizontale à (Γ) au voisinage de $+\infty$

$x < 0 \quad \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1-x}{x}e^{-x} + \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x}{x} = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

La courbe (Γ) de g admet alors une branche parabolique de direction celle de $(O;\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.

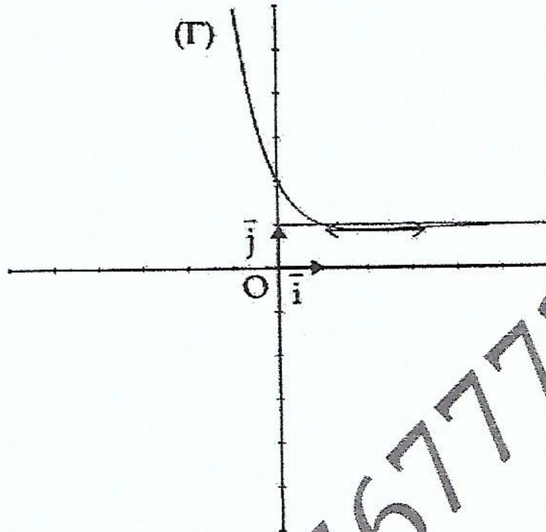
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$	1

2°) $f(x) = 1 + x(e^{-x} + 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = e^{-x} + 1 + x(-e^{-x})$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↗ $+\infty$



b) $f'(x) = g(x) = (1-x)e^{-x} + 1$

$f''(x) = g'(x) = e^{-x}(x-2)$

$g' = f''$ s' annule en 2 en changeant le signe d' où $A(2,\ f(2))$ est un point d' inflexion de C_f. $A(2; 3+2e^{-2})$.

Soit T la tangente à C_f en A d' où $T: y = (-e^{-2}+1)(x-2)+3+2e^{-2}$

$T: y = (1-e^{-2})x + 4e^{-2} + 1$

c) $f(x) = x+1+x \cdot e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et on a

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-(-xe^{-x})\right) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-xe^{-x}) = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0.$

D'où la droite $D: y = x+1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

$x < 0$ $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} + e^{-x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe C_f admet alors une branche parabolique de direction celle de $(O; \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.

$f(x) - (x+1) = xe^{-x}$

D coupe C_f en $A(0,1)$.

Ex 9 ☺ *Cette page s'adresse aux élèves désireux de se perfectionner en mathématiques. Le site est constitué d'exercices, résumés de cours et extraits de concours, du primaire au supérieur*

. www.facebook.com/MathTewa

1°) $I_1 = \int_0^1 t\sqrt{1+t}\cdot dt$

On pose: $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sqrt{1+t} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$$I_1 = \left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$I_1 = \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$I_1 = \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(2^{\frac{5}{2}}-1)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}+2}{5}\right) = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}$$

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a: $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,(t-1)\cdot dt$

$\forall\, t \in [0,1]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $t^n \sqrt{1+t}\,(t-1) \leq 0$ alors $\int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,(t-1)\cdot dt \leq 0$

d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $I_{n+1} - I_n \leq 0.$

Ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante.

3°) $\forall\, t \in [0,1]$ on a: $1 \leq 1 + t \leq 2$ alors $1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$ d'où $t^n \leq t^n\sqrt{1+t} \leq 2t^n$

Il en résulte que $\int_0^1 t^n\, dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt \leq \int_0^1 2t^n\, dt$

c'est à dire $\int_0^1 t^n\, dt \leq I_n \leq \sqrt{2}\int_0^1 t^n\, dt$ or $\int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}\left[t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Par suite $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

4°) Montrons que pour tout réel t de $[0,1]$ on a: $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

Pour tout réel t de $[0,1]$ on a: $\sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} - \sqrt{1+t} \geq 0$ et

$$\sqrt{2} - \sqrt{1+t} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+t})(\sqrt{2}+\sqrt{1+t})}{(\sqrt{2}+\sqrt{1+t})} = \frac{1-t}{\sqrt{2}+\sqrt{1+t}}$$

or $1-t \geq 0$ et $\sqrt{2} + \sqrt{1+t} \geq 2$ donc $\frac{1-t}{\sqrt{2}+\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

d'où $\forall\, t \in [0,1],\ 0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

On a alors: $\forall\, t \in [0,1]\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \sqrt{2}\, t^n - t^n\sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(t^n - t^{n+1})$

d'où $0 \leq \int_0^1 [\sqrt{2}\, t^n - t^n\sqrt{1+t}]\, dt \leq \int_0^1 \frac{1}{2}(t^n - t^{n+1})\, dt$

$$0 \leq \sqrt{2}\int_0^1 t^n\, dt - \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\, dt \leq \frac{1}{2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n \leq \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2n^2}$$

d'où $I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n$

Ainsi $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{2}\,\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2n} \leq nI_n \leq \sqrt{2}\,\frac{n}{n+1}$ ①

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2}\,\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2n} = \sqrt{2}$ ②

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2}\,\frac{n}{n+1} = \sqrt{2}$ ③

Les résultats ①, ② et ③ prouvent que $\lim\limits_{n \to +\infty} (nI_n) = \sqrt{2}$.

Ex 10 ☺

1°) a) $f(1) = (1-1)e^1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x-1)\,\mathrm{Log}(1-x) = \lim\limits_{X \to 0^+} -X\,\mathrm{Log}X = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Il en résulte que f est continue en $x_0 = 1$.

b) Soit $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\,\mathrm{Log}(1-x)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \mathrm{Log}(1-x) = \lim\limits_{X \to 0^+} \mathrm{Log}X = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à gauche en 1. La courbe représentative de f admet au point A(1,0) une demi-tangente à gauche définie par:

x = 1 et y ≥ 0.

$$\lim_{x \to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)e^x}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} e^x = e$$

donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = e$. La courbe représentative de f admet au point A(1,0) une demi-tangente à droite définie par $y = e(x-1)$ et $x \geq 1$.

2°) a) • f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et $\forall\, x \in \,]-\infty,1[$,

$$f'(x) = \mathrm{Log}(1-x) + (x-1)\frac{-1}{1-x} = 1 + \mathrm{Log}(1-x)$$

Pour tout $x \in \,]-\infty,1[$, on a:

$$f'(x) = 0 \iff \mathrm{Log}(1-x) = -1 \iff 1-x = e^{-1} \iff x = 1 - e^{-1}$$

$$f'(x) > 0 \iff \mathrm{Log}(1-x) > -1 \iff 1-x > e^{-1}$$

• f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall\, x \in \,]1,+\infty[$,

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = x e^x > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)\,\mathrm{Log}(1-x) = \lim_{X \to +\infty} -X\mathrm{Log}X = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-1)\,e^x = +\infty$$

$$f(1-e^{-1}) = -e^{-1} \cdot \mathrm{Log}\, e^{-1} = e^{-1}$$

Tableau de variation de f:

x	$-\infty$		$1-e^{-1}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0	↗	$+\infty$

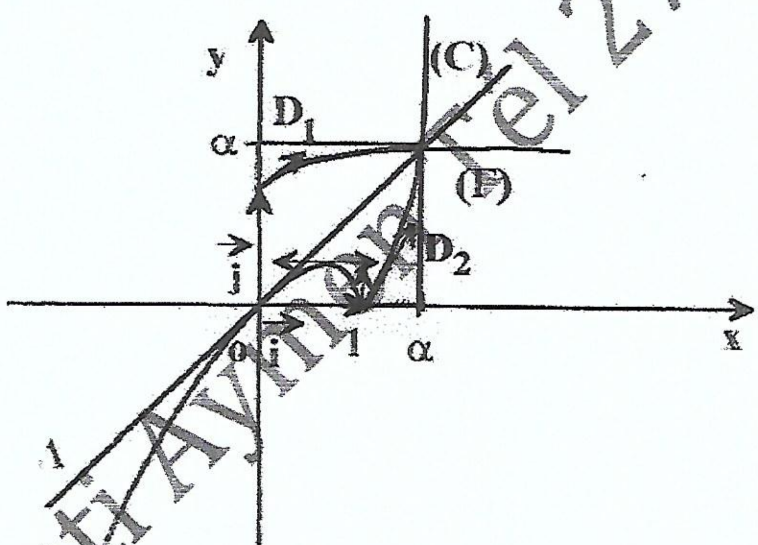
b) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x-1)\,\text{Log}(1-x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (1-\frac{1}{x})\,\text{Log}(1-x)$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-\frac{1}{x}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Log}(1-x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \text{Log}X = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)\,e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (1-\frac{1}{x})\,e^x = +\infty$

La courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ une branche infinie parabolique dont la direction est celle de la droite des ordonnées.



3°) a) g est la restriction de f à $I = [1,+\infty[$. g est continue strictement croissante sur I et $g(I) = [0,+\infty[$ donc g réalise une bijection de I sur $J = [0,+\infty[$.

b) La courbe (Γ) est symétrique, par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$, de la courbe représentative de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

4°) a) $\mathcal{A}(\alpha) = \int_1^{\alpha} (x-1)\, e^x \cdot dx$

Posons $u(x) = x-1$; $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$; $v(x) = e^x$

$$\mathcal{A}(\alpha) = \Big[(x-1)\, e^x\Big]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} e^x \cdot dx = \Big[(x-2)\, e^x\Big]_1^{\alpha} = (\alpha-2)\, e^{\alpha} + e$$

b) Soit D_1 la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations $y = 0$ et $x = \alpha$. D_2 la partie du plan limitée par (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $y = \alpha$.

D_1 et D_2 sont deux domaines plans isométriques donc ils ont la même aire $\mathcal{A}(\alpha)$.

$I = \int_0^{\alpha} g^{-1}(x) \cdot dx$ est l'aire de la partie du plan, limitée par (Γ) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$. L'aire du carré limité par les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$, $x = \alpha$ et $y = \alpha$ est égale à α^2.

d'où $I = \alpha^2 - \mathcal{A}(\alpha)$

$I = \alpha^2 - (\alpha-2)\, e^{\alpha} - e.$