Exercice 1 😊

I) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x+1+\ln x$.

a) Etudier les variations de g sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$ et que $0{,}27<\alpha<0{,}28$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer T et (C) en précisant les branches infinies de (C).

II) Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^{2x} f(t)\,dt$

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(x)$.

2) Soit $x\geq 0$

a) Montrer que pour tout réel t de $[1,x]$; $\frac{1}{2}\ln t\leq f(t)\leq t\ln t$.

b) Calculer les intégrales $I(x)=\int_1^{2x}\ln t\,dt$ et $J(x)=\int_1^{2x} t\ln t\,dt$

c) En déduire que $x\ln(2x)-x+\frac{1}{2}\leq F(x)\leq 2x^2\ln(2x)-x^2+\frac{1}{4}$.

d) Déterminer alors $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)$.

3) On donne $F(0)\approx 0{,}2$. Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Solution ☺

1) a) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{x+1} = 0 = f(0)$

b) $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{(x+1)} = -\infty$. F n'est pas dérivable à gauche en 0 et (C) admet au point O une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

2) a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$;
$g'(x) = 1+\frac{1}{x} > 0 \ \forall x>0$. ainsi g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) ~~g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.~~
$g(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$.donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha>0$. De plus $g(0.27)\approx -0.03 < 0$
$g(0.28) \approx 0.07 > 0$
donc $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$.

c)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3) a) $x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, $x\mapsto x+1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, de plus $\forall x>0, x+1\neq 0$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et $\forall x>0$; $f'(x) = \frac{(\ln x + x.\frac{1}{x})(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2}$

$= \frac{x\ln x + \ln x + x + 1 - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Le signe de f' est le signe de g(x).

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

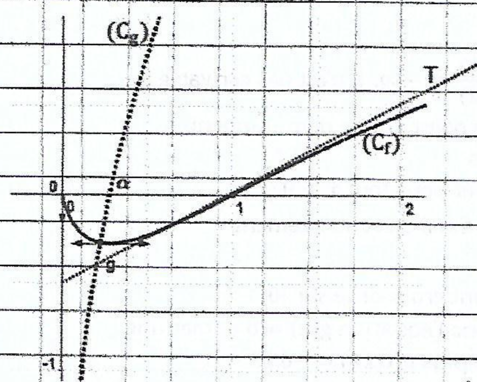
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$

4) a) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$T : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = 0$



I)

1) $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $[0,+\infty[$

$x \mapsto f(x)$ est Continue sur $[0,+\infty[$

Donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geq 0$;

$F'(x) = 2\,f(2x)$.

2) a) $\forall t \geq 1$

$$f(t) - t\ln t = \frac{t\ln t}{t+1} - t\ln t = (t\ln t)\left(\frac{t}{t+1} - 1\right)$$

$$= (t\ln t)\left(\frac{-1}{t+1}\right) \leq 0$$

$$f(t) - \frac{1}{2}\ln t = \frac{t\ln t}{t+1} - \frac{1}{2}\ln t = (\ln t)\left(\frac{t}{t+1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= (\ln t)\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \geq 0$$

Ainsi $\forall t \geq 1 ; \frac{1}{2}\ln t \leq f(t) \leq t\ln t$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) a- Dresser le tableau de variation de la fonction f

b- Montrer que la droite D d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour (C).

c- Préciser la branche infinie de (C) au voisinage de + oo.

d- Tracer la courbe (C).

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *Par* $F(x) = \int_1^{1+\tan x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$

a- Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x) = 1$.

b- En déduire que $F(x) = x$ et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+2} = \frac{\pi}{4}$

3) a-Montrer que $\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{x^2-x}{x^2-2x+2}dx$

b- Vérifier que pour tout $x \in IR$, $\frac{x^2-x}{x^2-2x+2} = 1 + \frac{x-1}{x^2-2x+2} \quad \frac{1}{x^2-2x+2}$

c-Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites

Solution ☺

1) f est définie ssi $x^2-2x+2 > 0$

or $x^2-2x+2=0$

$\Delta = -4 < 0$ sig $x^2-2x+2 > 0$

$Df = IR$

$f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$

b-

c- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc c_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

2) b- $F'(x) = 1$ sig que $F(x) = x + c$ or $F(0) = 0$ donc $F(x) = x$

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+2} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2) a- $\int_1^2 f(x)dx$

$u(x) = \ln(x^2-2x+2)$ $\qquad$ $u'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$

$v'(x) = 1$ $\qquad$ $v(x) = x$

$\int_1^2 f(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots$

b-Réduire au même dénominateur

c- $A = \int_1^2 |\ln(x^2-2x+2)|dx$

$$= \int_1^2 \ln(x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}dx$$

$$= 2\ln 2 - 2\int_1^2 1 + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}dx$$

= ………………

$$= (\ln 2 + \frac{\pi}{4})\ ua$$