Prof:Oueslati Aymen | Probabilités | BAC 2018

Tél 27677722 | "exercices corrigés" | Facebook:www.facebook.com/MathTewa

**Exercice 1 ☺ Variables aléatoires**

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessus :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$ | 0,15 | 0,24 | 0,35 | 0,26 |

1. Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}<2)$ c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=3\})$
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type, arrondi au millième, de la variable $\mathcal{X}$.

**Correction ☺**

1. Ce tableau représente une loi de probabilité car toutes ces valeurs sont des nombres appartenant à l'intervalle $[0;1]$ et car :
   $0{,}15+0{,}24+0{,}35+0{,}26=1$
2. a. On a : $\{\mathcal{X}\geqslant 2\}=\{\mathcal{X}=2\}\cup\{\mathcal{X}=3\}$
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2)=0{,}35+0{,}26=0{,}61$

   b. On a : $\{\mathcal{X}<2\}=\{\mathcal{X}=0\}\cup\{\mathcal{X}=1\}$
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}<2)=0{,}15+0{,}24=0{,}39$

   c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=3\})=0{,}24+0{,}26=0{,}5$

Oueslati Aymen

**3.** On a :

- $E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$
$= 0\times0{,}15 + 1\times0{,}24 + 2\times0{,}35 + 3\times0{,}26$
$= 0 + 0{,}24 + 0{,}7 + 0{,}78 = 1{,}75$

- $V(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{4} [x_i - E(\mathcal{X})] \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$
$= (0\text{-}1{,}72)^2 0{,}15 + (1\text{-}1{,}72)^2 0{,}24 + (2\text{-}1{,}72)^2 0{,}35 + (3\text{-}1{,}72)^2 0{,}26$
$= (-1{,}72)^2 \cdot 0{,}15 + (-0{,}72)^2 \cdot 0{,}24 + (0{,}28)^2 \cdot 0{,}35 + (1{,}28)^2 \cdot 0{,}26$
$= 0{,}44376 + 0{,}124416 + 0{,}02744 + 0{,}425984 = 1{,}0216$

- $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})} \simeq 1{,}011$

**Exercice 2 ☺ variables aléatoires**

Une urne contient 50 boules blanches, 25 boules noires et 25 boules rouges. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue 3 tirages indépendants et avec remise.

**1.** Déterminer la probabilité de l'évènement :
$A$ : "*les trois boules tirées sont blanches*".

**2.** Déterminer la probabilité de l'évènement :
$B$ : "*aucune des boules tirées est blanches*".

**3.** **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement :
$C_1$ : "*La première boule tirée est blanche ; les deux autres ne sont pas blanches*".

**b.** En déduire la probabilité de l'évènement :
$C$ : "*une seule des boules tirées est blanches*".

**4.** En déduire la probabilité de l'évènement :
$D$ : "*deux boules tirées sont blanches et une boule n'est n'est pas blanche*".

5. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées :

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

b. Déterminer l'espérance de la variable $\mathcal{X}$.

**Correction** ☺

1. La probabilité de tirer une boule blanche est de :
$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$
Les trois tirages étant indépendant, on a la probabilité suivante :
$$\mathcal{P}(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

2. La probabilité de tirer une boule noire ou rouge est de :
$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$
Les tirages étant indédendants et avec remise, on a :
$$\mathcal{P}(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

3. a. Les trois tirages sont indépendants et sans remise, on a :
$$\mathcal{P}(C_1) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$



b. On définit aussi les évènements $C_2$ et $C_3$ représentant les évènements où respectivement la seconde et la troisième boule blanche est la seule boule blanche tirée :

Les tirages étant tous similaires et indépendants, on en déduit l'égalité suivante des probabilités :
$$\mathcal{P}(C_1) = \mathcal{P}(C_2) = \mathcal{P}(C_3)$$
Et on a la relation suivante sur les évènements :
$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

où ces trois évènements sont disjoints.

On a :

$$\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = \mathcal{P}(C_1) + \mathcal{P}(C_2) + \mathcal{P}(C_3)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

**4.** Considérons l'évènement :

$D_1$ : *"La première boule est noire et les deux autres ne sont pas noires"*



On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(D_1) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir deux boules blanches est de :

$$\mathcal{P}(D) = 3\cdot\mathcal{P}(D_1) = 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

**5.** **a.** La variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend les valeurs 0, 1, 2, 3.

On a les égalités suivantes dévènements

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \mathcal{P}(B) = \frac{1}{8}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \mathcal{P}(C) = \frac{3}{8}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \mathcal{P}(D) = \frac{3}{8}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = \mathcal{P}(A) = \frac{1}{8}$



**b.** L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X})=0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)+1\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)+2\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)+3\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$$
$$= \frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$$

**Exercice 3** ☺**Arbre de probabilité**

Un jeu consiste à lancer quatre fois successivement une pièce de monnaie équilibrée. A chaque lancer, on note la face obtenue.

**1.** **a.** Construire un arbre de probabilité représentant cette expérience aléatoire.

b. En admettant que les sorties de cette expérience sont équiprobables, donner la probabilité d'un événement élémentaire.

On associe à chaque sortie de cette expérience aléatoire un gain :

- le gain est de 0 € si le côté face n'apparait pas ;
- le gain est de 1 € si le côté face apparait 1 fois ;
- le gain est de 2 € si le côté face apparait 2 fois ;
- le gain est de 4 € si le côté face apparait 3 fois ;
- le gain est de 10 € si le côté face apparait 4 fois ;

**2.** Pour chaque valeur prise par la variable aléatoire $\mathcal{X}$, associer sa probabilité.

**3.** A chaque sortie de cette expérience, on note $\mathcal{X}$ le gain obtenu.

- L'événement "*le gain obtenu est égal à 4 €*" se note $\{\mathcal{X}=4\}$.
- L'événement "*le gain est supérieur ou égal à 4 €*" se note $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$.

Déterminer les probabilités des événements ci-dessous

a. $\{\mathcal{X}=10\}$ b. $\{\mathcal{X}=4\}$ c. $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$

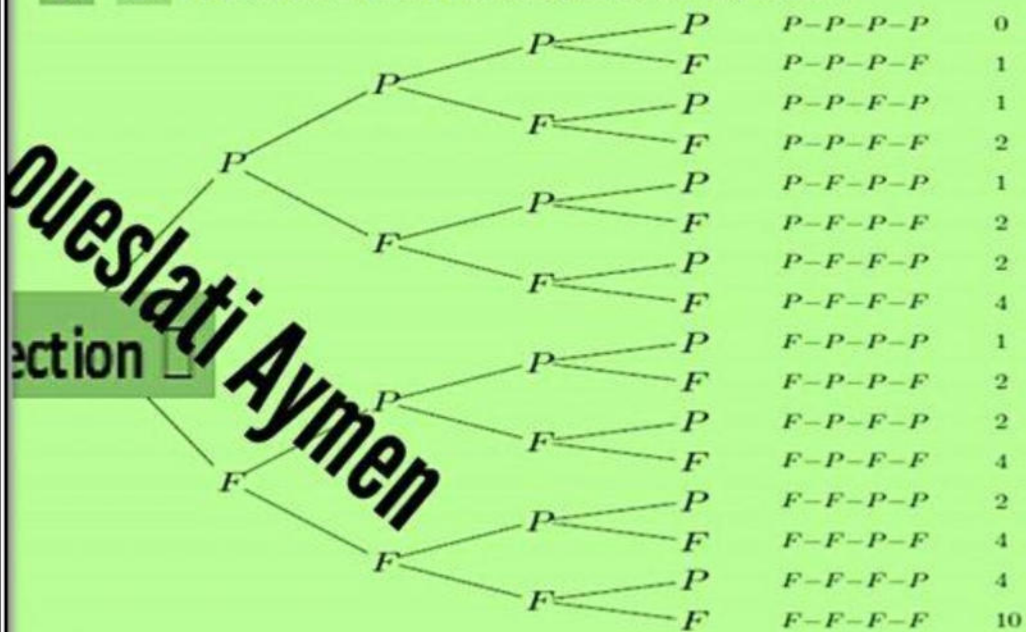
**4.** Compléter le tableau ci-dessous :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$ | | | | | |



Correction 😊

**1.** **a.** On obtient l'arbre de choix ci-dessous :






**b.** Cette expérience comporte 16 issues distinctes. Ainsi, en supposant l'équiprobabilité de cette expérience, chaque évènement élémentaire possède une probabilité de $\frac{1}{16}$.

**2.** La représentation de l'arbre de choix indique, dans sa partie droite, le gain associé à chacune des issues élémentaires de cette expérience.

**3.** **a.** L'évènement $\{\mathcal{X}=10\}$ est composé de 1 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=10) = \frac{1}{16}$$

**b.** L'évènement $\{\mathcal{X}=4\}$ est composé de 4 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

**c.** L'évènement $\{\mathcal{X}\geqslant4\}$ est composé de 5 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant4) = \frac{5}{16}$$

**4.** On a le tableau ci-dessous :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |

**Exercice 4 ☺Formule de probabilité totale ☹**

Une urne $A$ contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne $B$ contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

**Partie A**

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :

- S'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne $A$ ;
- Sinon il tire au hasard une boule de l'urne $B$.

1. Soit $R$ l'évènement "*le joueur obtient une boule rouge*". Montrer que $\mathcal{P}(R)=0{,}15$

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de $A$ est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de $B$ ?

**Partie B**

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie $A$, dans des conditions identiques et indépendantes *(c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve les urnes retrouvent leur composition initiale).*

Soit $x$ un entier naturel non nul



Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne $x$ euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par $G$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire $G$ prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et $-4$.

1. Déterminer la loi de probabilité de $G$.

2. Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire $G$ en fonction de $x$.

3. Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $E(G)\geqslant 0$

Correction 😊

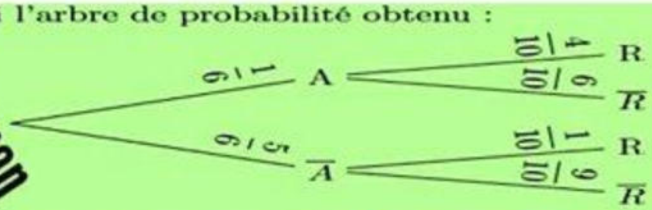
**Partie A**

**1.** Pour modéliser cette expérience, on considère les deux événements suivants :

- $A$ : "*On obtient 1 avec le dé*" ;
- $R$ : "*La boule tirée est rouge*".



Voici l'arbre de probabilité obtenu :




D'après l'arbre de probabilité, on obtient les deux probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(A\cap R) = \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(R) = \frac{1}{6}\times\frac{4}{10} = \frac{4}{60}$
- $\mathcal{P}(\overline{A}\cap R) = \mathcal{P}(\overline{A})\times\mathcal{P}_{\overline{A}}(R) = \frac{5}{6}\times\frac{1}{10} = \frac{5}{60}$

Les évènements $A$ et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers $\Omega$. La formule des probabilités totales permettent d'obtenir la probabilité de l'évènement $R$ :
$\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}(A\cap R) + \mathcal{P}(\overline{A}\cap R) = \frac{4}{60} + \frac{5}{60} = \frac{9}{60} = 0{,}15$

**2.** Déterminons les deux probabilités conditionnelles suivantes :

- $\mathcal{P}_R(A) = \dfrac{\mathcal{P}(R\cap A)}{\mathcal{P}(R)} = \dfrac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{4}{60}\times\frac{60}{9} = \frac{4}{9}$
- $\mathcal{P}_R(\overline{A}) = \dfrac{\mathcal{P}(R\cap \overline{A})}{\mathcal{P}(R)} = \dfrac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{5}{60}\times\frac{60}{9} = \frac{5}{9}$

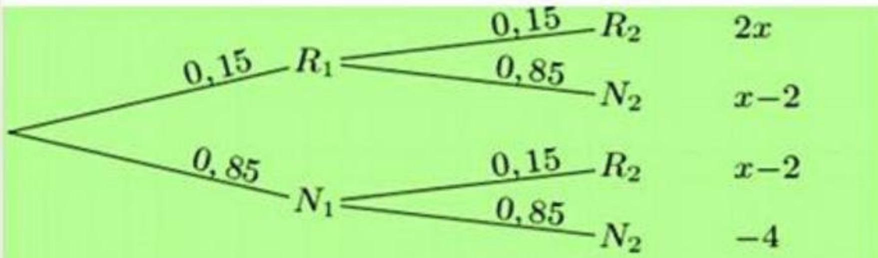
Ayant obtenu une boule rouge, la probabilité est plus grande d'avoir tirée cette boule à partir de l'urne $B$.

**Partie B**

**1.** Le tirage de la boule se répète deux fois, ainsi le joueur peut :

- tirée aucune boule rouge auquel cas il a perdu 4 euros ;
- tirée une seule boule rouge auquel cas il a gagné $x$ euro et il en a perdu 2 euros.
- tirée deux boules rouges auquel cas il a gagné $2x$ euros.

Voici l'arbre de probabilité associé aux tirages des deux boules ; on a indiqué sur la droite le gain associé à chacun des chemins :




On obtient la loi de probabilité de la variable aléatoire $G$ :

| $k$ | $-4$ | $x-2$ | $2x$ |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}(G=k)$ | 0,7225 | 0,255 | 0,0225 |

**2.** L'espérance de la variable aléatoire se calcule par :

$$E(G)=(-4)\times\mathcal{P}(G=-4)+(x-2)\times\mathcal{P}(G=x-2)+2x\times\mathcal{P}(G=2x)$$
$$= -4\times 0{,}7225+(x-2)\times 0{,}255+2x\times 0{,}0225$$
$$= -2{,}89+0{,}255x-0{,}51+0{,}045x=0{,}3x-3{,}4$$

**3.** Résolvons l'équation suivante :

$$E(G)\geqslant 0$$
$$0{,}3x-3{,}4\geqslant 0$$
$$0{,}3x\geqslant 3{,}4$$
$$x\geqslant \frac{3{,}4}{0{,}3}$$



Ainsi, l'espérance de ce jeu positive ou nulle si $x$ est supérieur ou égal à $\frac{34}{3}$.

**Exercice 5 😊loi binomial 😊**

On dispose de deux urnes indiscernables $U_1$ et $U_2$.

$U_1$ contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs. $U_2$ contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs.

1) Une première épreuve consiste à tirer un jeton de l'urne $U_1$ et un jeton de l'urne $U_2$. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A : « Obtenir deux jetons noirs »

B : « Obtenir deux jetons de même couleur »



C : « Obtenir un jeton blanc et un seul ».

2) Une deuxième épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à tirer un jeton de cette urne.

a – Montrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à $\frac{1}{2}$.

b – Calculer la probabilité de tirer un jeton de l'urne $U_1$, sachant qu'il est blanc.

3) On répète la deuxième épreuve n fois de suite ( $n \geqslant 2$ ), en remettant chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine.

Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de fois où on a tiré un jeton blanc.

a – Donner la loi de probabilité de X.

b – Calculer son espérance et sa variance.

c – Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la probabilité de tirer deux fois un jeton blanc est supérieure ou égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Correction ☺**

1) $p(A) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ $\quad p(B) = \frac{2\times3}{25}+\frac{3\times2}{25} = \frac{12}{25}$ $\quad p(C) = \frac{3\times3}{25}+\frac{2\times2}{25} = \frac{13}{25}$

2) a – On choisit l'urne $U_1$ et on tire un jeton blanc ou on choisit l'urne $U_2$ et on tire un jeton blanc.

Soient : D l'événement « tirer un jeton blanc » , $U_1$ : « tirer un jeton de l'urne $U_1$ » et

$U_2$ : « tirer un jeton de l'urne $U_2$ » .

on a $D= (U_1 \cap D)\cup(U_2 \cap D)$ avec $(U_1 \cap D)$ et $(U_2 \cap D)$ incompatibles.

la probabilité de tirer un jeton blanc est donc

$p(D) = p(U_1\cap D) + p(U_2\cap D) = p(U_1).p(D/U_1) + p(U_2).p(D/U_2) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$

$= \frac{1}{2}$.



b) $p(U_1/D) = \frac{p(U_1\cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$

3) $X(\Omega) = \{ 1 , 2, \dots , n \}$. X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.

a) $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ : $p(X = k) = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $E(X) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ $\quad V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$

c) $p(X = 2) = C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $C_n^2 \geq 1$ alors $p(X = 2) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

**Exercice 6 ☺ loi exponentielle ☺**

La durée de vie (en années) d'un appareil électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.



1) a) Déterminer $\lambda$ pour que $p(X \geq 8) = 0.28$

b) Calculer la probabilité pour que l'appareil ait une durée de vie inférieure ou égale à trois mois.

c) Déterminer T tel que $p(X \leq T) = 4p(X \geq T)$.

2) Sachant qu'un appareil a déjà dépassé six ans, quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne quatre ans de plus.

3) Une personne achète n appareils électroniques identiques ( $n \in IN^*$ ) du modèle précédent.

On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.

a) Exprimer, en fonction de n, la probanilité $p_n$ qu'au moins un appareil fonctionne plus que 8 ans ?

b) Déterminer n pour que $p_n \geq 0.998$.

**Correction ☺**

1) a) $p(X \geq 8) = 0.28 \Leftrightarrow e^{-8\lambda} = 0.28 \Leftrightarrow -8\lambda = \ln(0.28) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0.28)}{8} = 0.159$

b) 3 mois en années est $\frac{1}{4}$ année

$P(X \leq \frac{1}{4}) = 1 - e^{-\frac{1}{4}\lambda} = 1 - e^{-\frac{0.159}{4}} = 0.039$

c) $p(X \leq T) = 4p(X \geq T)$

$$\Leftrightarrow 1-e^{-\lambda T} = 4e^{-\lambda T} \Leftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{5} = 0.2 \Leftrightarrow -\lambda T = \ln(0.2) \Leftrightarrow T = -\frac{\ln(0.2)}{\lambda} = -\frac{\ln(0.2)}{0.159} \simeq 10{,}12$$

2) $p(X \geq 10 | X \geq 6) = \dfrac{p((X \geq 10) \cap (X \geq 6))}{p(X \geq 6)} = \dfrac{p(X \geq 10)}{p(X \geq 6)} = \dfrac{e^{-10\lambda}}{e^{-6\lambda}} = e^{-4\lambda} = e^{-4 \times 0.159} \simeq 0{,}529$

3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils ayant une durée de vie $X \geq 8$.

Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = p(X \geq 8) = 0.28$

a) $p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (0{,}72)^n$.

b) $p_n \geq 0.998 \Leftrightarrow 1 - (0{,}72)^n \geq 0{,}998 \Leftrightarrow (0{,}72)^n \leq 0{,}002 \Leftrightarrow n\ln(0{,}72) \leq \ln(0{,}002)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0.002)}{\ln(0.72)} \simeq 18.91 \Leftrightarrow$ n est un entier supérieur ou égal à 19.