Exercice 1 ☺ **LOI Binomiale-loi Exponentielle**

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A.

Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

a. Définir la loi de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?

3. a. Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 0{,}0007e^{-0{,}000\,7x}$.

Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

Correction ☺ Soit D l'événement « l'article est défectueux »

$\overline{D}$ est l'événement contraire de D.

D_1 : « L'article présente un défaut de soudure »

D_2 :« L'article présente un défaut sur un composant électronique »

$$P(D) = 1 - P(\overline{D})$$

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D_1}) \times P(\overline{D_2}) = 0.9506$$

$$\Rightarrow P(D) = 1 - 09506 = 0.0494$$

2-On choisi k l'article dans cette surface. Il n'y a que deux possibilités .« L'article est défectueux ». ; « L'article est non défectueux »

$$P(X = k) = C_{800}^{k}(0.9506)^{800-k}(0.0494)^{k}$$

X suit une loi binominale de paramètre : $n = 800$ et $p = 0.0494$

$$E(X) = np = 800 \times 0.0494 = 39.52$$

Le sens de E(X) est sur les 800 articles, l y a environ de 400 articles défectueux.

3-

La probabilité qu'il y ait plus de deux articles défectueux dans sa commande est : $1 - \left[0.9506^{25} + 25 \times (0.9506)^{24} \times 0.0494\right] \approx 0.352$

Soit n le nombre des articles

La probabilité d'avoir au moins un article défectueux est :

$$1 - (0.9506)^{n} = p_n$$

$$p_n \le 0.5 \Rightarrow 1 - (0.9506)^{n} \le 0.5 \Rightarrow (0.9506)^{n} \ge 0.5 \Rightarrow n\ln(0.9506) \ge \ln(\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow n\ln(0.9506) \geq -\ln(2) \Rightarrow n \leq \frac{\ln(2)}{\ln(0.9506)} \text{ donc } n \leq 13 \text{ donc } n = 13$$

4)

$$P(700 \leq X \leq 1000) = \int_{700}^{1000} 7.10^{-4} e^{-7.10^{-4}x} dx = \left[-e^{-7.10^{-4}x}\right]_{700}^{1000}$$

$$= \frac{1}{e^{0.49}} - \frac{1}{e^{0.7}} \approx 0.116$$

Exercice 2 ☺ Fonction exponentielle + intégrale calcule d'aire

1. Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

d. Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}\,; \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in IN^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$. Déterminer I_2 et I_3.

c. Soit A l'aire, exprimée en cm², du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation x = 0 et x = 1. Calculer A.

Correction ☺

1-Soit f la fonction définie par : $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$.

Rappel : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n.e^{-mx} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^{mx} = 0$

avec m et n deux entiers positifs

D'où la limite de f est 0 en +∞ et la limite de f est - ∞ en -∞.

b)f est dérivable sur IR (Produit de fonctions dérivables sur IR).

$f'(x) = (6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2)e^{-x} = (-2x^3 + 10x^2 - 8x).e^{-x}$

ce qui donne : $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4).e^{-x} = -2x(x-1)(x-4)e^{-x}$.

c)Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{-2}{e}$	↗	$-64e^{-4}$	↘	0

2. Pour $n \in IN^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1 = \frac{-1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$$

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$

$$I_n = [-x^n e^{-x}]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx = \frac{-1}{e} + nI_{n-1}$$

$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e}$ et $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = \frac{-16}{e} + 6$

c. Soit A l'aire, exprimée en cm², du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation x = 0 et x = 1.

Calcul de A.

$$A = -(2I_3 - 4I_2) = -12 + 8 + \frac{32}{e} - \frac{20}{e} = \frac{12-4e}{e}.$$

Exercice 3 ☺ Probabilité condionnelle Loi Binomiale ☹

On considère un dé cubique non truqué et deux urnes U_1 et U_2. Le dé est formé de deux faces portant le numéro « 1 » et quatre faces portant le numéro « 2 ». L'urne U_1 contient 4 boules blanches et 3 noires. L'urne U_2 contient 3 boules blanches et 2 noires.

1°/ On lance le dé une fois et on tire simultanément deux boules de l'urne désignée par le numéro que fait sortir le dé. On considère les évènements suivants :

N : " Obtenir le numéro1 " et A : " Obtenir deux boules de même couleur "

a/ Calculer : $p(N)$, $p(\overline{N})$, $p(A|N)$, $p(A|\overline{N})$. En déduire $p(A)$

b/ Sachant qu'on a tiré deux boules de même couleur, qu'elle est la probabilité pour qu'elle proviennent de l'urne U_1 ?

c/ Sachant qu'on a tiré deux boules de même couleur, qu'elle est la probabilité pour qu'elle soient blanches ?

2°/ On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \geqslant 2$) en remettant après chaque tirage les boules dans leur urne d'origine.

Soit X l'aléa numérique égal au nombre des fois où l'événement A est réalisé

On note : $p_k = p(X = k)$ et U_n la probabilité de réaliser l'événement A au moins une fois

a/ Déterminer la loi de probabilité de X et calculer en fonction de n : E (X), V (X) et U_n

b/ Déterminer le plus petit entier n tel que $U_n \geqslant 0,99$

c/ Calculer en fonction de n, la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_k$

Correction ☺

1°/ a/ $p(N)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ Et $p(\overline{N})=1-p(N)=\frac{2}{3}$

- « $A|N$ » est l'évènement : « Tirer deux boules de même couleur de l'urne U_1 »

  Donc : $p(A|N)=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_7^2}=\frac{6+3}{21}=\frac{3}{7}$

- « $A|\overline{N}$ » est l'évènement : « Tirer deux boules de même couleur de l'urne U_2 »

  Donc : $p(A|\overline{N})=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$

- D'après la loi des probabilités totales on a : $p(A)=p(N)\times p(A|N)+p(\overline{N})\times p(A|\overline{N})=\boxed{\frac{43}{105}}$

b/ La probabilité d'obtenir deux boules de U_1 sachant qu'on a tiré deux boules de même couleur est :

$$p(N|A)=\frac{p(N\cap A)}{p(A)}=\frac{p(N)\times p(A|N)}{p(A)}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}\times\frac{105}{43}=\frac{15}{43}$$

c/ Considérons l'évènement B : « Obtenir deux boules blanches »

La probabilité d'obtenir deux boules blanches sachant qu'on a tiré deux boules de même couleur est :

$$p(B|A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{p(B)}{p(A)} \text{ Car } B\subset A$$

$$p(B)=p(N)\times p(B|N)+p(\overline{N})\times p(B|\overline{N})=\frac{1}{3}\times\frac{C_4^2}{C_7^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{31}{105} \text{ Donc : } p(B|A)=\frac{31}{105}\times\frac{105}{43}=\frac{31}{43}$$

2°/ a/ L'aléa numérique X suit une loi binomiale de paramètres n et $p(A)=\frac{43}{105}$.

Sa loi de probabilité est telle que : $\forall k\in\{0;1;2;\cdots\cdots;n\}$, $p(X=k)=C_n^k\left(\frac{43}{105}\right)^k\left(\frac{62}{105}\right)^{n-k}$

Son espérance est : $E(X)=\frac{43n}{105}$ et sa variance est : $V(X)=\frac{43\times 62n}{105^2}=\frac{2666n}{11025}$

$$U_n=p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-C_n^0\left(\frac{43}{105}\right)^0\left(\frac{62}{105}\right)^n=1-\left(\frac{62}{105}\right)^n$$

b/ $U_n\geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{62}{105}\right)^n\leq 0,01 \Leftrightarrow \text{Log}\left(\frac{62}{105}\right)^n\leq \text{Log}(0,01)$

$$\Leftrightarrow n\,\text{Log}\left(\frac{62}{105}\right)\leq \text{Log}(0,01) \Leftrightarrow n\geq\frac{\text{Log}(0,01)}{\text{Log}\left(\frac{62}{105}\right)} \Leftrightarrow n\geq 9$$

c/ $S_n=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)p_k=\sum_{k=0}^{n}k^2p_k-\sum_{k=0}^{n}k\,p_k=E(X^2)-E(X)=V(X)+E^2(X)-E(X)$

D'où : $S_n=\frac{2666n}{11025}+\frac{1849n^2}{11025}-\frac{4515n}{11025}=\frac{1849}{11025}(n^2-n)$