Les intégrales - Logarithme népérien
Géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère le plan $P_m : 2x - y + 2z + m = 0$; (m étant un paramètre réel).
Soit l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$

1) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le rayon et le centre Ω.
2) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m la position relative de (S) et le plan P_m
3) a) Caractériser l'intersection de la sphère (S) et le plan P_3.
   b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans Q et Q' tangents à (S) et parallèles au plan P_3.

EXERCICE 2 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(-2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $C(-1,1,1)$ et $\Omega(-1,2,2)$.

1) Soit l'ensemble P des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$
   a) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à P.
   b) Montrer que P est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
2) Calculer $\overrightarrow{A\Omega}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$. En déduire que $\Omega \notin P$.
3) Montrer que le point Ω appartient à l'axe du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
4) Soit S la sphère de centre $\Omega(-1,2,2)$ et de rayon $R= \sqrt{2}$.
   a) Ecrire une équation cartésienne de S.
   b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle $\mathcal{C}$.
   c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 3 :

On pose pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$

1) a) Vérifier que $I_2 = \frac{8}{15}$
   b) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a :
   $I_{n+1} = (2n + 2) \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n \, dx$
   c) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$
2) On considère les deux fonctions F et G définies sur IR par :
   $F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1 - t^2)^n dt$ et $G_n(x) = \int_0^x (\cos t)^{2n+1} \, dt$
   a) Montrer que f et g sont dérivables sur IR et calculer $F_n'(x)$ et $G_n'(x)$ pour tout $x \in IR$
   b) En déduire que pour tout réel x, on a : $F_n(x) = G_n(x)$
   c) En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^7 \, dt$

EXERCICE 4 :

1) Simplifier chacune des expressions suivantes :
   a) $A= \ln 60 + \ln 20 - 2.\ln 10$
   b) $B= 2\ln\left(a^3\sqrt{b}\right) + \ln\left(\frac{a}{b^4}\right) - 4\ln(b^3)$; $a > 0$ et $b > 0$

2) Résoudre dans IR :

$2lnx - 8 = 0$, $1 + 2ln(x-1) = 0$, $2lnx + 6 \leq 0$ et $2 - 4ln(x+3) \leq 0$

EXERCICE 5 :

Calculer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 lnx$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{ln\,x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x-2)}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - x)lnx$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x.lnx - x^2)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(\sqrt{x})}{x}$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{(x-1)^3}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x^2+1)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x.ln(1+\frac{1}{x})$

EXERCICE 6 :

Calculer chacune des intégrales suivantes : $\int_1^e x.lnx\,dx$; $\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx$; $\int_e^{e^2} \frac{1}{x.lnx}dx$;

$\int_e^{e^2} \frac{1}{x.\sqrt{lnx}}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tanx\,dx$ et $\int_1^e (lnx)^2\,dx$

EXERCICE 7 :x

On pose pour tout $n\in$ IN*, $u_n = \int_1^e (lnx)^n.dx$

1) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0$ pour tout n∈ IN

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) Á l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n∈ IN, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$

3) a) En tenant compte des questions 1)a) et 2) , montrer que $\frac{e}{n+2} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) Soit la fonction $f : x \mapsto (lnx)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $u_1 = 1$. En déduire u_2 et u_3.

b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de $(O,\vec{i})$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 8 : x

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{e}{2}$	↘	$-\infty$

A/ Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = x^2(a + b.lnx) \\ f(0) = 0 \end{cases}$ (où a et b sont deux réels).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

On suppose que la courbe représentative (C) de f passe par le point A(1,1) et que la tangente T à (C) en ce point a pour équation : $y = x$

1) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

2) En déduire les valeurs de a et b.

B/ Dans la suite on prend : $\begin{cases} f(x) = x^2(1 - lnx) \text{ pour tout } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Calculer $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique au V(+∞) qu'on précisera.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et l'axe des abscisses.

4) a) Etablir le tableau de variation de la fonction $h : x \mapsto x - xlnx - 1$

b) En déduire alors la position de (C) par rapport à T.

5) Tracer la tangente T et la courbe (C).