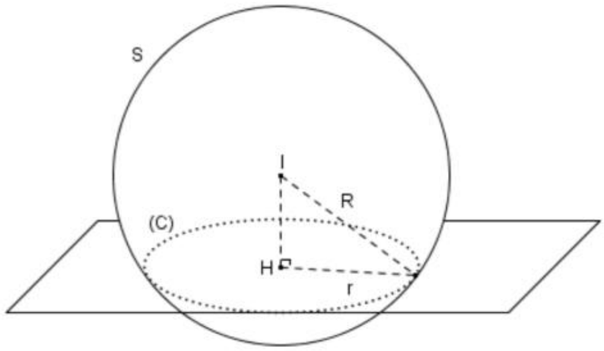
SERIE D'EXERCICES N°10

Géométrie dans l'espace - Etude de fonctions

EXERCICE 1 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit les points A(3,2,6) ; B(1,2,4) et C(4,-2,5).

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire que les points A , B et C déterminent un plan qu'on notera P.
   c) Montrer qu'une équation du plan P est $2x+y-2z+4=0$.
2) a) Vérifier que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.
   b) Calculer le volume du tétraèdre OABC, puis sa hauteur issue de O.
3) Soit (S) l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que :
   $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=6$
   a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
   b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le centre H et le rayon r.



4) Soit les points E(0,3,-1) , F(4,1,1) et G(-2,1,1).
   a) Montrer que [FG] est un diamètre de S.
   b) Vérifier que $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=0$.
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan T passant par E et tangent à S.

EXERCICE 2 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On donne les points $A(-2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $C(-1,1,1)$ et Ω(-1,2,2).

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$
   b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan (qu'on notera P).
2) Montrer alors qu'une équation du plan P est $x+y+z-1=0$
3) a) Montrer que les points A, B, C et Ω ne sont pas coplanaires.
   b) Calculer le volume V du tétraèdre ΩABC, puis calculer sa hauteur issue de Ω.
4) Montrer que le point Ω appartient à l'axe du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
5) Soit S la sphère de centre Ω(-1,2,2) et de rayon R= $\sqrt{2}$.
   a) Ecrire une équation cartésienne de S.
   b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle $\mathcal{C}$.
   c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 3 :

A/ Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2+4x+3}$; $x \in]-\infty,-3] \cup [-1,+\infty[$

(C) étant sa courbe selon un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en (-3) et à droite en (-1). En déduire une interprétation géométrique.
2) a) Montrer que f est dérivable sur $I=]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$ et calculer f'(x) pour tout x∈I
   b) Etablir le tableau de variation de f.

3) Montrer que la droite D : $x=-2$ est un axe de symétrie de (C).
4) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
5) Tracer la courbe (C).

B/ Soit g la restriction de f à l'intervalle [-1,+∞[.
1) Montrer que g réalise une bijection de [-1,+∞[sur un intervalle K que l'on précisera.
2) Tracer la courbe (C') de g dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3) a) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en $2\sqrt{2}$ et calculer $(g^{-1})'(2\sqrt{2})$.
   b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur l'intervalle K.
4) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

EXERCICE 4 :

1) Soit h la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $h(x)=1+\cos x$
   a) Dresser le tableau de variation de h.
   b) Montrer que h réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   c) Calculer $h^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$.
   d) Montrer que h^{-1} est dérivable sur [1,2[et calculer $(h^{-1})'(x)$.
2) On considère la fonction f définie sur [1,2] par $f(x)=2\sqrt{2x-x^2}$
   Montrer que f admet une primitive sur [1,2].
3) Soit F la primitive de f sur [1,2] qui s'annule en 2.
   On pose $G(x)=F(1+\cos x)$ pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$.
   a) Montrer que G dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et montrer que $G'(x)=\cos(2x)-1$.
   b) Déduire G(x) pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$.
   c) Calculer $F\left(\frac{3}{2}\right)$.

EXERCICE 5 :

Soit $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $x \in [0,+\infty[$
1) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive G de g qui s'annule en 0.
2) Soit $H(x)=G(\tan(x))$; $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$
   a) Montrer que H est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et déterminer H'(x).
   b) En déduire que H(x)=x pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$. Calculer $G(\frac{\sqrt{3}}{3})$
3) On pose pour tout $x \in IR_+$, $K(x)=G\left(\frac{1}{1+x}\right)+G\left(\frac{x}{x+2}\right)$
   a) Montrer que K est dérivable sur IR_+ et calculer $K'(x)$.
   b) En déduire que $G\left(\frac{1}{2}\right)+G\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$