| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTREDE L'EDUCATION<br>®®®®®®®<br>ENS : MAB / SALAH Num : 22427502 | Epreuve : Mathématiques<br>Section : SCIENCES ET ECH<br>SERIE n° :13 — DURE : 3H<br>Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION13 |
|---|---|

**EXERCICE N°1 :** **(4 points )**

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle $N$ l'événement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et $G$ l'événement « le joueur gagne ».

1. a. Déterminer la probabilité de l'événement $N$.

   b. Démontrer que la probabilité de l'événement $G$ est égale à $\frac{3}{10}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de $m$ euros est demandée, où $m$ est un réel strictement positif.

   Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.

   S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.

   S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

   On appelle $X$ la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

   a. Déterminer la loi de probabilité de $X$.

   b. Exprimer l'espérance mathématique de $X$ en fonction de $m$.

   c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de $X$ est nulle.
   Déterminer $m$ pour que le jeu soit équitable.

3. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   On joue $n$ fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
   Déterminer la valeur minimale de $n$ pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à 0,999.

**EXERCICE N°2 :** **(6poitns)**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).
On considère les points $I$ et $A$ d'affixe respectives 1 et $-2$. Le point $K$ est le milieu du segment $[IA]$.
On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[IA]$.
Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit $B$ le point d'affixe $b = \dfrac{1+4i}{1-2i}$. Écrire $b$ sous forme algébrique et montrer que $B$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit $D$ le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'angle $\left(\overrightarrow{KI}; \overrightarrow{KD}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, où $k$ est un entier relatif, et soit $d$ l'affixe de $D$.
   a. Quel est le module de $d + \dfrac{1}{2}$? Donner un argument de $d + \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que $d = \dfrac{1}{4} + 3i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
   c. Déterminer un réel $a$ vérifiant l'égalité $\dfrac{1+2ia}{1-ia} = \dfrac{1}{4} + 3i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
3. Soit $x$ un réel non nul et $M$ le point d'affixe $m = \dfrac{1+2ix}{1-ix}$. On pose $Z = \dfrac{m-1}{m+2}$. Calculer $Z$ et en déduire la nature du triangle $AIM$.
4. Soit $N$ un point, différent de $A$, du cercle $\mathscr{C}$ et $n$ son affixe.
   Démontrer qu'il existe un réel $y$ tel que $n = \dfrac{1+2iy}{1-iy}$.

**EXERCICE N°03 :** **(4poitns)**

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_n \neq \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}$.
3. On pose $k = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leq k\left|u_n-\sqrt{2}\right|$. En déduire que la suite U converge vers $\sqrt{2}$.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \dfrac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} < 1$.
   En déduire que la suite $(u_{2n})$ est croissante et que la suite $(u_{2n+1})$ est décroissante.
5. Application : calculer les premiers termes de la suite U et établir les encadrements suivants de $\sqrt{2}$ :
   $1 < \dfrac{7}{5} < \dfrac{41}{29} < \sqrt{2} < \dfrac{99}{70} < \dfrac{17}{12} < \dfrac{3}{2}$.

**<u>EXERCICE N°04 :</u> (6 points )**

### Partie A

On considère la fonction $g$ définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.

1. Étudier les variations de la fonction $g$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.
3. En déduire que pour tout $x$ de $[0,+\infty[$, $\mathrm{e}^x-x>0$.

### Partie B

On considère la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-x}$.

La courbe (C) représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe, page 6.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que $f$ est strictement croissante sur $[0,1]$.

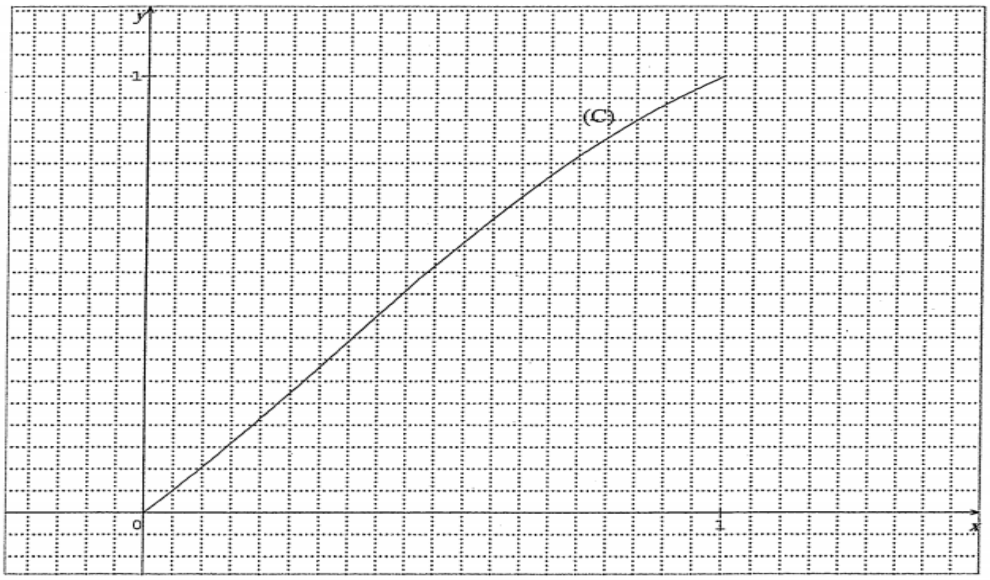
1. Montrer que pour tout $x$ de $[0,1]$, $f(x)\in[0,1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y=x$.
   a) Montrer que pour tout $x$ de $[0,1]$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)\,g(x)}{\mathrm{e}^x-x}$.

   b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0,1]$.
3. a) Déterminer une primitive de $f$ sur $[0,1]$.
   b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

### Partie C

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=f(u_n). \end{cases}$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.
3. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.


y
1
(C)
0
1
x