REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques Section : SCIENCES ET ECH SERIE n° :15 — DURE : 3H Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION15

<u>EXERCICE N°1 :</u> (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points $A(1 ; 1 ; 1)$ et $B(3 ; 2 ; 0)$;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\vec{AB}$ pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$

2. Déterminer une équation de la sphère (S).

3. a) Calculer la distance du point A au plan (Q)
En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

b) Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées $(0 ; 2 ; -1)$

a) Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.

b) Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q)

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)

d) On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C »

Justifier votre réponse.

<u>EXERCICE N°2 :</u> (6poitns)

<u>Partie 1 :</u>

Un test de dépistage d'une maladie responsable à la disparition des lapins a fourni les renseignements suivantes :

- 70% des lapins sont malades.
- Si un lapin est malade, le test est positif dans 93% des cas.
- Si un lapin n'est pas malade, le test est positif dans 5% des cas.

On note : M : « le lapin est malade » et P : « le test est positif ».

1.) a. Donner l'arbre de probabilité qui modélise cette situation.

b. Déterminer la probabilité que le test est positif.

2.) Sachant que le test est positif, déterminer la probabilité qu'un lapin soit malade.

3.) On choisit au hasard 5 lapins. Déterminer la probabilité que 4 lapins ont un test négatif.

<u>Partie 2 :</u>

On suppose qu'un virus responsable à cette maladie a une durée de vie T exprimée en heures qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

La durée moyenne de vie d'un virus est donnée par $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

1.)a. A l'aide d'une intégration par parties, Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

b. Dans la suite, la durée moyenne de vie d'un virus étant de 100 heurs.
Déterminer la probabilité que le virus persiste dans l'organisme du lapin plus que 4 jours.

c. Sachant que le virus a persisté plus que 4 jours, quelle est la probabilité qu'il persiste moins qu'une semaine.

2.) a. Déterminer, en heure, le temps t tel que $p(T \geq t) = p(T \leq t)$

b. Définir puis représenter la fonction de répartition de T.

<u>EXERCICE N°03 :</u> (4poitns)

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1985 et 2015.

Année	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers habitants y	18	21	25	30	36	42	50

1.) a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.

b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart-type σ_Y de la variable Y.

c. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série double (X,Y).

2.) a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrées.

(Les coefficients seront arrondis au millième)

b. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2013, à un millier prés.

3.) L'allure du nuage de la série double (X,Y) incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ solution de l'équation différentielle $y' = 0{,}034y$ tels que f(0) = 18

a. Montrer $f(x) = 18e^{0{,}034x}$.

b. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2013, à un millier prés.

c. La population en 2013 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble plus pertinent ?

Justifier votre choix

d. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur [0 ; 30] ; on donnera le résultat arrondi au dixième.

e. Déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne.

EXERCICE N°04 : (6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$, vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif, $x f'(x) - f(x) = x^2 e^{2x}$.

1) Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, vérifie la condition *(E),* alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ vérifie :

pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = e^{2x}$.

2) En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui vérifient la condition *(E).*

3) Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui vérifie la condition *(E)* et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?

Partie B :

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{e}{2}x$.

On désigne par c sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

2) a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\mathrm{d}x$ et en déduire $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\mathrm{d}x$.

b) En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe c.