REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques	
	Section : SCIENCES ET ECH	
	SERIE n° :15	DURE : 3H
	Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION15	

EXERCICE N°1 : (4 points)

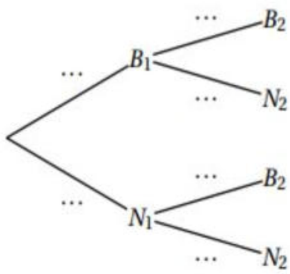
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'événement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.
Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
   Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.
   a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
   d. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
   Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
   Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
   Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE N°2 : **(6poitns)**

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE N°03 : **(4poitns)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{J}, \vec{K})$, on considère les points $A(1, 1, 1)$; $B(-1, 0, -5)$ et C tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{J} - \vec{K}$

1 °) a ° / Verfier que les coordonnées de C est $(0, 1, -1)$

b ° / Montrer que A , B et C forment un plan P d'équation : $2x + 2y - z - 3 = 0$

2 °) On donne $D(2, 2, 2)$

a ° / Montrer que l'aire de triangle ABC est $\frac{3}{2}$

b ° / Déterminer le volume de tétraèdre ABCD

c ° / En déduire la distance entre D et le plan P

3 °) Soit $S = \left\{ M(x, y, z) \text{ tel que : } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + z + \frac{1}{2} = 0 \right\}$

a ° / Montrer que S est une sphère de centre $I\left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{3}$

b ° / Montrer S et P se coupent suivant un cercle ξ dont on déterminera le rayon

c ° / Déterminer la représentation paramétrique de la droite Δ passant par I et perpendiculaire à P

d ° / En déduire les coordonnées de point H centre de cercle ξ

<u>EXERCICE N°04 :</u> (6 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

2. (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

   (b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.