REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques Section : SCIENCES ET ECH SERIE n° :7 — DURE : 3H Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION7

EXERCICE N°1 : **(4 points)**

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 *près.*

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

- M l'événement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

EXERCICE N°2 : (6poitns)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1+\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathscr{C}$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in [0;2\pi[$.
   On considère l'application f qui, à tout point M de $\mathscr{C}$, associe $f(M) = MA \times MB$.

   a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha.$$

   b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.

   c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3. a. En utilisant **2.c**, montrer qu'il existe deux points M de $\mathscr{C}$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

   b. En utilisant **2.c**, montrer qu'il existe un seul point M de $\mathscr{C}$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE N°03 : (4poitns)

Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points A (1,-2,2) ;

B (1,0 ,1) et l'ensemble S des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera son centre I et son rayon R.

2) Soit P le plan passant par E(1,1,-1) et perpendiculaire à la droite (AB).

  a- Déterminer une équation cartésienne du plan P.

  b- Montrer que P et S sont tangents et préciser les coordonnés de leur point de contact H.

3) Soit Q le plan tangent à S en B.

  a- Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q est $-2x + z + 1 = 0$.

  b- Montrer que les plans P et Q sont sécants et déterminer la droite $\Delta = P \cap Q$.

  c- Montrer que $\Delta \cap S = \varnothing$.

4) Soit Q_m : $-2x + z + m = 0$ ou m est un paramètre réel.

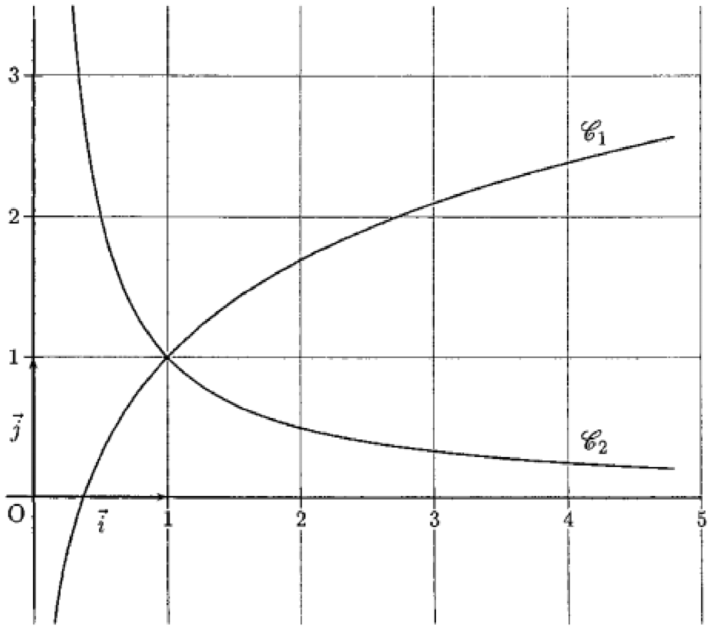
  a- Déterminer suivants les valeurs de m : $S \cap Q_m$.

  b- Montrer que Q_0 coupe la sphère S suivant un cercle ζ qu'on déterminera son rayon r et son centre H'.

<u>EXERCICE N°04 :</u> (6 points)

Partie I

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :
   - 0
   - $+\infty$
   - On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :
   - 0
   - 0,2
   - On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote oblique :
   - Oui
   - Non
   - On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

•

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\|\|$	$+$

•

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\|\|$	$-$

•

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$.

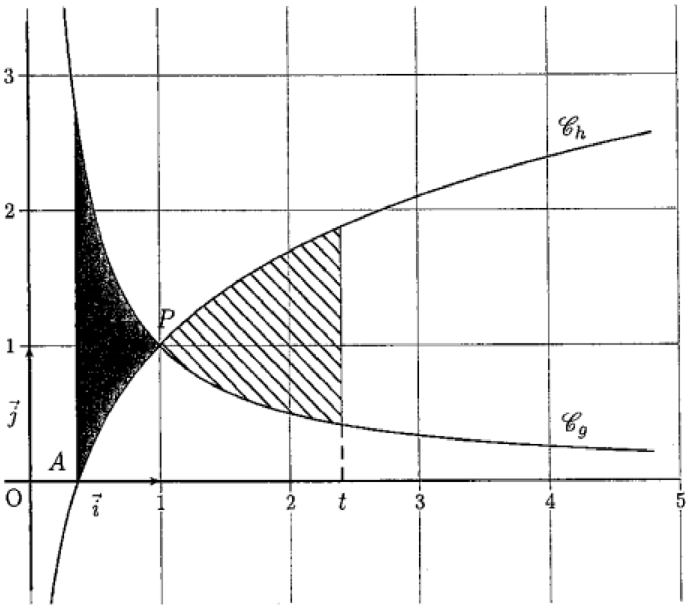
1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.
5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ qu'on note α.
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.



1. A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.
2. P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont $(1\,;1)$.
3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).
   (a) Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie **II**.

   (b) Montrer que $\mathscr{A} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1\,;+\infty[$. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).

   On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.

   (a) Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

   (b) Conclure.